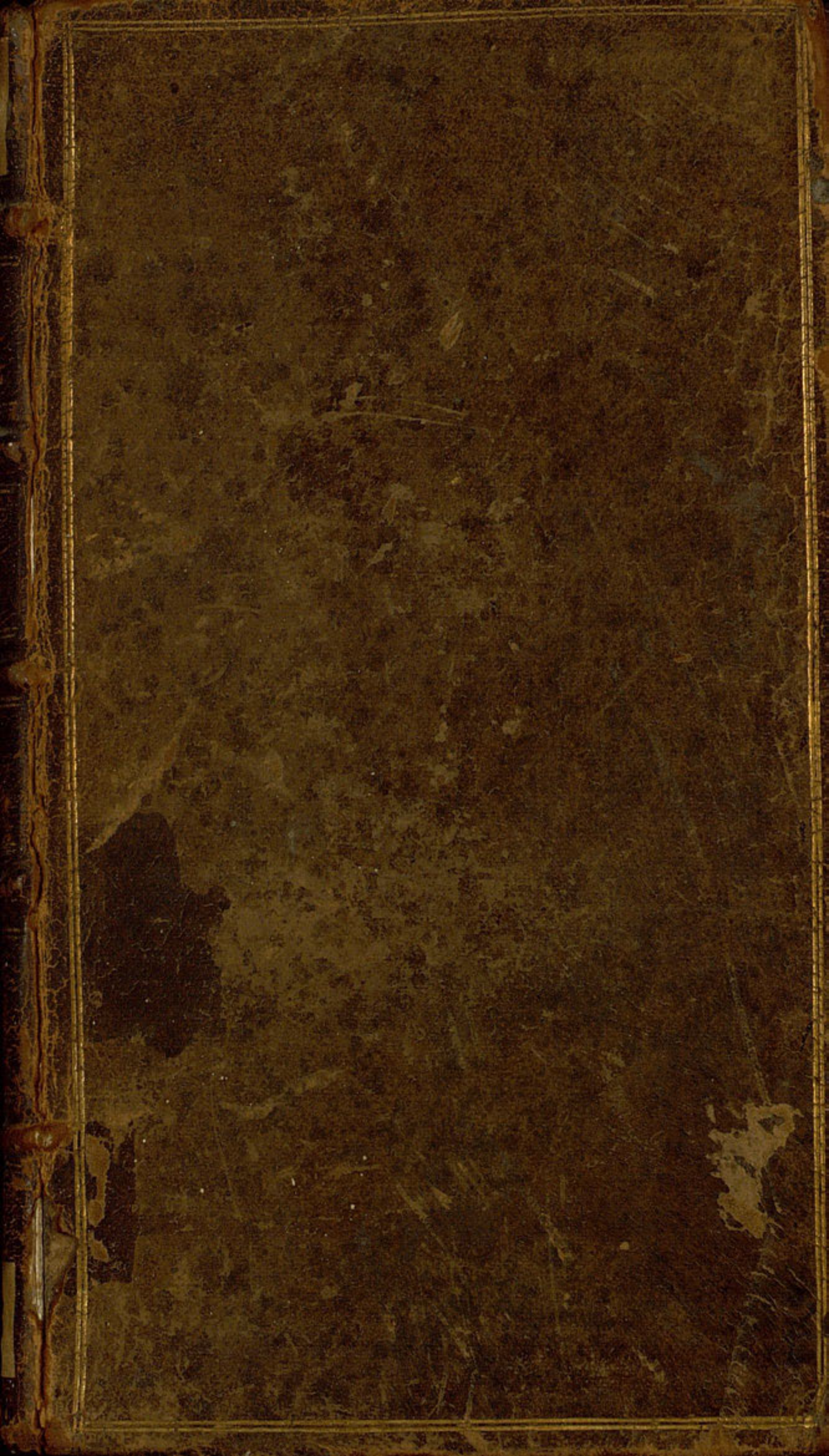
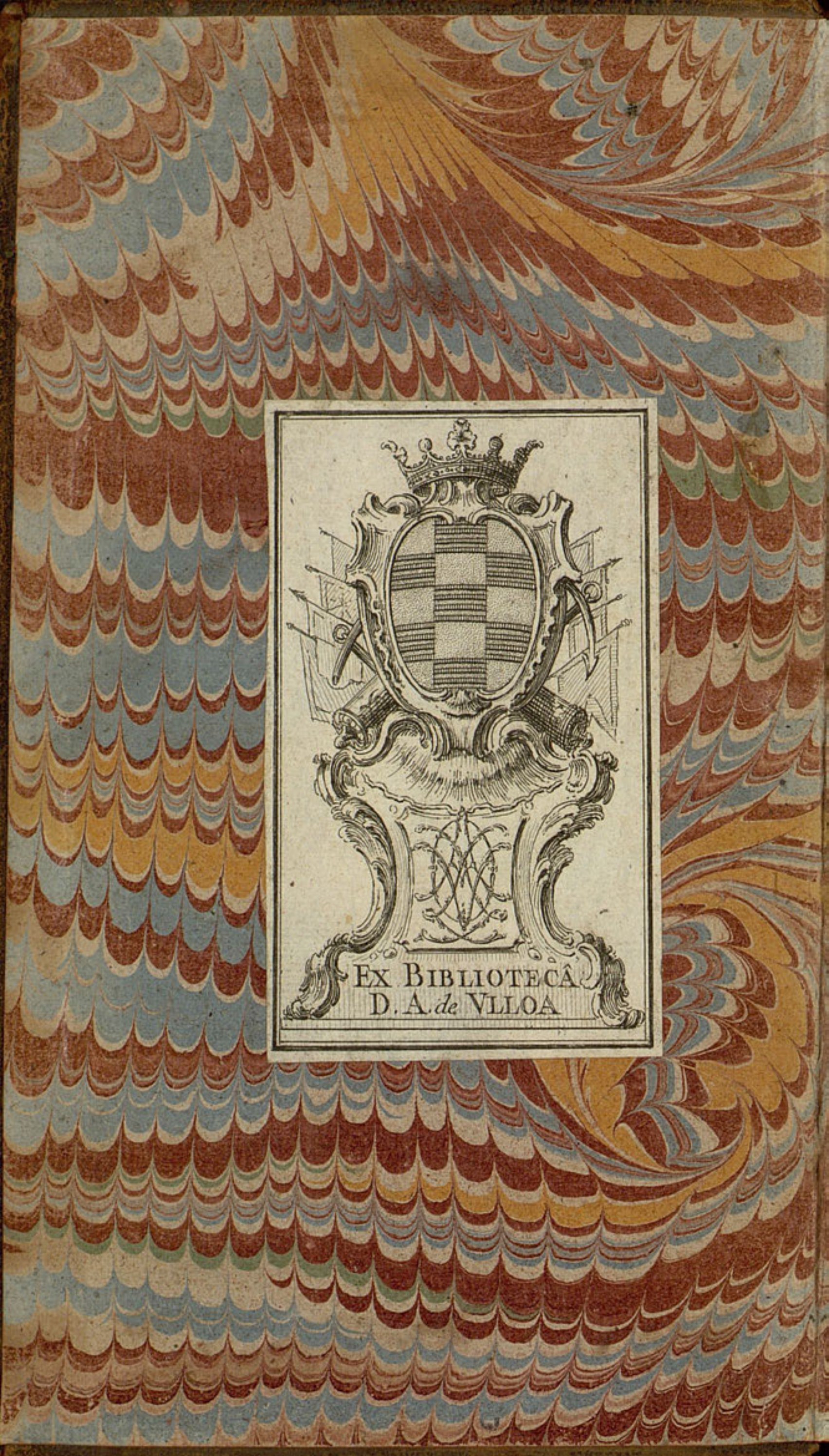



EX BIBLIOTECÂ
D. A. de VLLOA



NEUTONI

Genesis Curvarum per Umbras.

SEU

PERSPECTIVÆ UNIVERSALIS

ELEMENTA;

EXEMPLIS

Coni Sectionum

ET

Linearum Tertii Ordinis

ILLUSTRATA.



LONDINI:
Apud A. MILLAR. M.DCC.XLVI.

V. C.

MARTINO FOLKES,

REGIAE SOCIETATIS PRAESIDI,

TRACTATUM HUNC,

HONORIS ET OFFICII CAUSÂ,

D. D.

Patricius Murdoch.

LECTORI S.

MAgnitudo extenſa alia eſt Realis *magis et* Conſtans, *quae ejuſdem Generis* Menſuram ſemper *et* ubique *admittit : alia* Apparens, *cujus* Idea *per Viſûs praecipue Organum menti defertur ; varia ipſa et mutabilis pro vario* Viſibilis *ſitu ; certâ tamen Variationis lege, quae ex datis Conditionibus determinetur* *. *Unde, pro* duplici *Objecto,* duplex *etiam* Geometria *cenſeri poteſt ; quarum alteram Viſibilium, ſive* Opticam, *appellemus.*

Magni-

* Hujus diſtinctionis vi explodentur Commenta quaedam a *Scepticis* venditata.

Magnitudines ad datum aliquod punctum, ceu Oculum, ſic relatas ſaepius contemplati ſunt Mathematici, Graphices *tamen uſum feré reſpicientes,* Sphaerae *mundanae deſcriptionem, et ſimilia. Veteres certé haec leviùs attigiſſe teſtatur* Optica, *ut fertur,* Euclidis; *luculentiùs etiam* Pappi Lib. VI. Prop. 54. *Neque ante* Neutonum *reperias qui ad univerſam Geometriam pertinere viderit, et plura de Figuris Curvilineis Problemata vix aliunde eſſe ſolvenda.*

Is quidem in Articulo de Geneſi Curvarum per Umbras, *Enumerationi* Linearum Tertii Ordinis *ſubjuncto rem totam diſerté expoſuit,* "*Curvas* "*omnes ejuſdem Generis è Simplici-* "*oribus quibuſdam generari*" *docens, non ſecus atque Coni Sectiones è Circulo.*

Idem Transmutationem *Curvarum in alias ejusdem Generis Curvas, in* Lemm. XXII. Princip. *tradiderat: in quâ* Geometriam *hanc* Opticam *universam contineri intelliget quisquis Lemma istud, et quae sequuntur, cum Doctrinâ Projectionum contulerit* *.

Quo igitur Methodi praestantissimae Usum Exemplis comprobarem, Linearum Secundi *et* Tertii *Ordinis Enumerationem* (Anno 1732) *confeci, praemissis,* Lemmatum *loco,* Perspectivae *Elementis. Ea deinde Amicis quibusdam visa ita non displicuere, quin edita Geometriae studiosis grata fore judicarent: mihi autem diversis omnino et severioribus*

Studiis

* *Vid.* infr. pag. 57.

Studiis detento, horum Consiliis nunc tandem obtemperare licuit.

Opusculi ipsius Rationem atque Ordinem paucis accipe. Sectio Prima *Perspectivae Linearis Principia complectitur; iis etiam utilis futura qui* Graphicen *solam ediscere cupiunt, de ceteris minus solliciti. Haud enim affirmare dubitem, huic Proposito satis fore paucula quae ibi docentur Elementa; modo quis Geometriâ* Euclideâ *instructus, Figuras quam plurimas sibi delineandas proponat; neque aliorum descriptionibus pueriliter imitandis tempus atque operam ludat.*

Secunda *Projectionum Affectiones Geometricas tradit; unde Curvam quamlibet ex umbrâ alterius Datae* Genitam, *ex Crurum* Numero, Specie, Plagis,

Plagis, *in promptu erit definire. Projectiones etiam quâ ratione Aequationibus* Algebraicis *designentur, breviter indicatur.*

Tertiâ *Sectione, Projectio Coni Sectionum utilioribus quibusdam Exemplis illustratur. Quae in* Stereographicâ *Sphaerae Projectione, et in* Gnomonicis, *difficultatis aliquid habent obiter explicantur : addito etiam* Problemate *uno ex Astronomicis, de* Planetarum *Orbitis determinandis.*

Subjungitur denique Recensio Linearum Tertii *Ordinis, numeris suis absoluta;* *cum* Theorematis *nonnullis de iisdem Curvis, quae hâc methodo investigata eximium ipsius Usum haud dubié commonstrant.*

Brevitati, quoad licuit, ubique consultum ; ne Scientiarum fastidio in-

dies crescenti, nostrâ etiam culpâ, quidquam accederet. Tu, Candide Lector, sicubi in his erratum fuerit ignoscas, quaeso, et corrigas.

ERRATA Typographica (praeter leviora quaedam) ſic corrigenda.

Pag. 32, l. penult. pro *habetur* lege *habeatur*.
Pag. 49, l. antepenult. et pag. 50. l. 4. pro A, B, C, &c. lege À, B̀, C̀, &c.
Pag. 50. l. 10. pro A, lege À.
Pag. 52. l. 7. lege ſimplicioris.
Pag. 70. l. 1. pro poſſet lege poſſit. *ibid.* l. 6. lege Figurarum. *ibid.* l. 10. lege augurari.
Pag. 108. l. penult. pro *utque* lege *atque*.

GENESIS CURVARUM PER UMBRAS.

SECTIO I.

Perspectivae Linearis Principia.

DEFINITIONES.

I. Fig. 1.

SI recta infinita XY per punctum immotum Z, ceu *Polum*, ducta, secundum lineam quamcunque datam moveatur, atque interea Plano

alicui infinito M N positione dato occurrat; occursus ille, Lineae Expositae *Projectio*, Planum vero M N, *Planum Projectionis*, dicetur.

Corol. 1.

Si *Linea exposita*, ut P L, *recta fuerit*, *recta erit et ipsius Projectio* p L. Superficies nimirum, motu rectae infinitae genita, omnis in eodem Plano existet (2. *el.* 11.); cujus itaque Occursus cum Plano dato erit recta (3. *ejusd.*)

Et si secundum Figurae alicujus rectilineae, parallelogrammae scilicet aut polygonae, recta illa infinita circumagatur, Superficies genita erit binarum *Pyramidum* similium, communi vertice Z; quarum proinde Intersectiones cum Plano quolibet erunt rectilineae.

Corol. 2.

Sin motus ille secundum *Curvam*, P O L, temperetur, Superficies descripta

ſcripta erit *conici generis*, Vertice Z; et cujus interſectio p o L, cum Plano quovis M N recta eſſe nequit. Alias recta p o L, cum p L, quae et ipſa recta eſt, Spatium includere poſſet.

Punctum Z hic et in ſequentibus extra Planum M N locari ſupponitur, ad diſtantiam finitam.

D E F. II.

Figuram aut Lineam expoſitam in eodem Plano conſtitui ponimus; Planumque illud *Baſin* appellamus. Ejuſmodi eſt Planum E F cui inſcribitur Curva P O L, et recta P L.

D E F. III.

Recta L S in quâ Planum Projectionis Baſin ſecat, *Linea Baſeos* dicetur.

D E F. IV.

Si per Polum Z ductum fuerit Planum Z C I, Baſi E F parallelum, Plano Projectionis occurrens in rectâ

C I; Planum illud *Horizontale* dicetur, atque Intersectio C I, *Linea Horizontalis*.

C O R O L.

Linea Horizontalis est *Lineae Baseos* parallela; 16. *el.* 11.

D E F. V.

Per Polum Z Planum Z C G, Planis modo descriptis perpendiculariter insistens, *Verticale* dicetur. Hujus cum Plano Horizontali Intersectio Z C est *Axis* Projectionis. Punctum C in quo hic Lineae Horizontali occurrit, Projectionis *Centrum*: Recta autem C G, in quâ Planum Projectionis secat, Basi et Plano Horizontali intercepta, *Radius* appellatur.

Et siquando usui fuerit pro Plano Verticali Z C G, aliud, ut Z c p g P Π, usurpare, quod sit Basi aut Plano Projectionis, aut forte utrique, *Obliquum*, Planum Projectionis atque Horizontale, in rectis c g, Z c, secans,

Rectas

Rectas illas, et Punctum c, iisdem vocabulis designabis, addito *Secundariorum* epitheto.

D E F. VI.

Si denique per Polum Z duci intelligatur Planum Z R V, Plano Projectionis parallelum, quod Basin secet in RV; erit RV *Linea Extremorum*, quia sc. Lineae huic contigua in extrema Projectionis abeunt.

C O R O L.

Linea Extremorum est *Lineae Baseos* parallela.

P R O B L E M A.

Datis Polo Z, Plano Projectionis MN, et puncto P, hujus Projectionem (p) invenire.

Cas. I. *Fig.* 1.

1°. Sit primo punctum P ad alteras partes Plani Projectionis quam Polus Z; et positis quae in Defini-

tionibus explicata et constructa sunt, si per Axem Z C et punctum P ducatur Planum Z C P L, Basim secans in P L, Planum Projectionis in C L; patet Projectionem quaesitam repertum iri in hoc Plano, et quidem in rectâ Z P. At eadem in rectâ C L reperietur, adeoque in puncto p, ubi Z P, C L se mutuo secant.

Porro quum sint rectae Z C, P L, parallelae (*Def.* 4; et 16 *el.* 11.) similia erunt Triangula P L p, Z C p, ad verticem p constituta; et P L : Z C : : L p : C p; sive (*compon.*) P L + Z C : P L : : C L : L p. Est etiam Angulus Z C I rectus (*Def.* 5.) et huic aequalis P L S (19. *el.* 11.)

Si itaque a Puncto P dato, lineae Basis L S fiat normalis P L, ipsi occurrens in L, et jungatur C L; distantia P L Axi Z C addita, erit ad eandem P L ut est C L ad L p quaesitam. At datis punctis Z, P, cum Plano Projectionis, et assumto Plano quovis per P transeunte, quod Pla-

num

num Projectionis ſecans efficiat Lineam Baſis L S, dantur P L, Z C, C L; adeoque et L p.

Practicam vero Problematis in Plano Conſtructionem ſic expedias, *Fig.* 2.

Ductâ, in plano aliquo, Baſis lineâ L S, atque huic normali L Q, in hâc fiat L P diſtantiae puncti dati a lineâ Baſis aequalis; atque in L S capiatur L G diſtantia puncti P a plano Verticali; ut G M rectae L S normalis, interſectionem Plani Verticalis cum Baſi exhibeat. In rectâ G M productâ capiantur, ad partes puncto P contrarias, G H aequalis Axi Projectionis, G C aequalis Radio, et per puncta H, P, ductis H N, P M, ipſi LS parallelis, quarum haec Verticali occurrat in M, junctâ etiam C L; huic in rectâ H N capiatur H K aequalis, et ductâ K M, quae ipſam L G ſecet in D, ſi in L C fiat L p = D G, erit p Projectio quaeſita.

Est enim M H : M G : : H K : D G ; sive, ex Constructione, P L + Z C (in *Fig.* 1.) : L P : : C L : L p. Adeo ut ductâ C I ipsi L S parallelâ, et, in H C productâ, factâ C Z = G H, si Plano P G immoto, elevari intelligatur pars schematis I C G L secundum rectam L S, ut datum quemvis Angulum cum Basi efficiat, ac deinde replicetur pars I C Z secundum rectam I C, ut fiat Basi parallela, Schema hoc in praecedens convertetur ; et recta quae Z, P puncta conjungit transibit per p.

Cas. II. *Fig.* 1 et 3.

2°. Sit punctum expositum ad easdem cum polo Partes, sed minori a Plano Projectionis distantiâ, ut in P 2 (*Fig.* 1.) ; erit Projectio p 2 in recta C L ad partes L productâ. Est autem C Z : P 2 L : : C p 2 : L p 2 et (*divid.*) C Z — P 2 L : P 2 L : : C L : L p 2. Et constructio quae in *Fig.* 3. exhibetur eo diversa erit a praece-

praecedente, quod ſint P, M, puncta ad has partes rectae L S, adeoque et K M producta ſecet D ad alteras partes puncti G.

Caſ. III. *Fig.* 1 et 4.

3°. Sit denique punctum P ad eaſdem partes ſed ad majorem a Plano Projectionis diſtantiam quam eſt Polus Z, ut in P 3 (*Fig.* 1.) Illius Projectio erit in L C productâ ſupra Planum Horizontale. Et quum ſit P 3 L : Z C : : L p 3 : C p 3, et (*convert.*) P 3 L — Z C : P 3 L : : C L : L p 3. In Conſtructione (*Fig.* 4.) erit P in Q L ultra H N productâ, punctum D cadet ad alteras partes puncti L, et erit p in L C productâ, ad partes C.

Atque ex his quaecunque de Punctorum Projectione proponi poſſunt facile ſequuntur; quae autem de rectilineorum Projectione apud Auctores fuſius explicantur, tanquam *Corollaria* ex iiſdem deducas.

COROL.

COROL. 1. *Fig.* 1.

Rectae cujusvis P Π *Projectio* p π *est quae Punctorum* P, Π, *Projectiones conjungit*, (*Cor.* 1. *Def.* 1.)

COROL. 2.

Rectarum omnium lineae Basis LS parallelarum, sive rectae illae in ipsâ Basi sint, sive extra illam, sitae, Projectiones, rectae L S et sibi invicem sunt parallelae. Si enim per Polum ducta fuerit Z T lineae Baseos parallela, et circa hanc tanquam Axem rotari intelligatur Planum in quo subinde inveniantur rectae expositae atque earundem Projectiones ; ex *Elementis* constabit *Theorema.* Quod et ex Praxi modo tradita facile demonstres. Porro, rectarum hujusmodi *quae in infinitam abiit distantiam*, sive ad has sive ad illas plani Projectionis partes, *projicietur in ipsam Horizontalem* C I. Et vice versâ,

Linea

Linea Extremorum R V *projicietur ad distantiam infinitam.*

COROL. 3.

Constat etiam, *si in Segmenta quaevis dividatur Linea ipsi* L S *parallela, fore Projectiones directé ut Segmenta.*

COROL. 4.

Rectae cujusvis P L in Basi ductae quae sit lineae Basis L S *normalis, projectio L p, si opus producta, per centrum C transibit :* Liquet ex Constructione : vel etiam singendo Planum circa Axem Z C revolvi ; in quo si inveniatur recta quaevis P L, invenietur et ipsius Projectio L p, quam per Centrum transire necesse est. Si *recta P L in ipso Plano Verticali fuerit ; Projectio erit lineae Basis perpendicularis. Sin ad distantiam infinitam a dicto plano recesserit, Projectio erit ipsa Linea Horizontalis.*

C O R O L. 5.

Scriptis pro Z C, P L, C L literis a, d, r, erit in Casu Problematis 1°, L p $= \frac{rd}{a+d}$; et auctâ d ut evadat $d+x$, erit Projectio $\frac{r \times \overline{d+x}}{a+d+x}$; a quâ si subducatur $\frac{rd}{a+d}$, est residuum $\frac{arx}{\overline{a+d} \times \overline{a+d+x}}$ projectio Segmenti x. Unde, si detur Segmentum, *erit Projectio ut rectangulum sub distantiis terminorum ipsius a Linea Extremorum inverse.* Et *punctum in recta L P aequabiliter motum, in recta L C moveri videbitur velocitate quae sit inverse ut quadratum distantiae puncti a Linea Extremorum.*

C O R O L. 6.

Rectae P Π *quae sit ipsi L S obliqua, atque huic parallelarum, Projectiones transibunt per* (c) *punctum in Linea Horizontali a Centro Primario Diversum.* Demonstratur ut praece-

praecedentia ; ducendo Planum per Polum Z et aliquam e rectis P Π, quod projectionem efficiat p π Horizontali in puncto *c* occurrentem ; ac deinde Planum illud circa Axem Z c revolvendo. *Harum* quoque *quae in distantiam abiit infinitam projicietur in Horizontalem* C I. Et ratio quam Segmentorum quorumvis Projectiones inter se obtinent, invenietur ut supra.

COROL. 7.

In universis, *puncta in quibus a Lineâ Extremorum secantur, projiciuntur in infinitum.* Adeoque *quae ad Lineam Extremorum concurrunt, abeunt in Parallelas* ; et conversim, *quae projiciuntur in Parallelas concurrebant ad lineam Extremorum.* Unde, et ex COROL. 4 et 6, liquido constat, pro reciprocâ Planorum *Basis* et *Projectionis* functione, linearum *Extremorum* et *Horizontalis* functiones quoque invicem *reciprocari.*

Corol. 8.

Si de *Angulis* quaeratur: Quoties Linea exposita est rectae L S *normalis*, ut P L; propter datas C G, G L et Angulum C G L rectum, dantur Anguli G C L, G L C. In stilo Arithmetico, *ut* C G *ad* G L: *ita Radius ad Tangentem Anguli* GCL.

Sin ad L S *Obliqua* fuerit ut P Π; datâ positione P Π dabitur ipsius intersectio cum L S, (quae sit g,) sive intercepta G g; datur etiam C c, centrorum distantia. Et si π sit intersectio Projectionis p π et radii C G (si opus producti), propter datas G g, C c dabitur ratio G g $\pm$ C c ad C c; id est ratio C G ad C π. Datur itaque C π, et Species Trianguli C π c, sive Angulus C π c.

Obiter etiam notari potest, quod, datis, in priore Casu, Radio C G et distantiâ G L, detur Projectionis L p inclinatio, quaecunque fuerit Axis Z C magnitudo. At secus rem se habere

habere in Casu secundo; auctâ enim ZC augebitur Cc, et contrà.

Corol. 9.

Rectarum Basi insistentium quae sunt Plano Projectionis parallelae, projiciuntur in parallelas. Sin, sibi invicem parallelae, Plano Projectionis utcunque inclinentur; projectiones ad idem punctum convergent; illud nempe in quo recta, lineis expositis parallela, per polum ducta, Plano Projectionis occurrit.

Corol. 10.

Si, quod plerumque fit, Planum Projectionis Basi ponatur rectum, et ad hanc puncta omnia *extra ipsam sita*, demissis sc. perpendiculis, referantur, *horum* projectiones sic invenies. *Fig.* 2.

Sit puncti (Π) Altitudo supra vel infra Basin, a: Perpendiculum vero ab ipso demissum Basi occurrat in P; cujus Projectio per regulas jam tra-

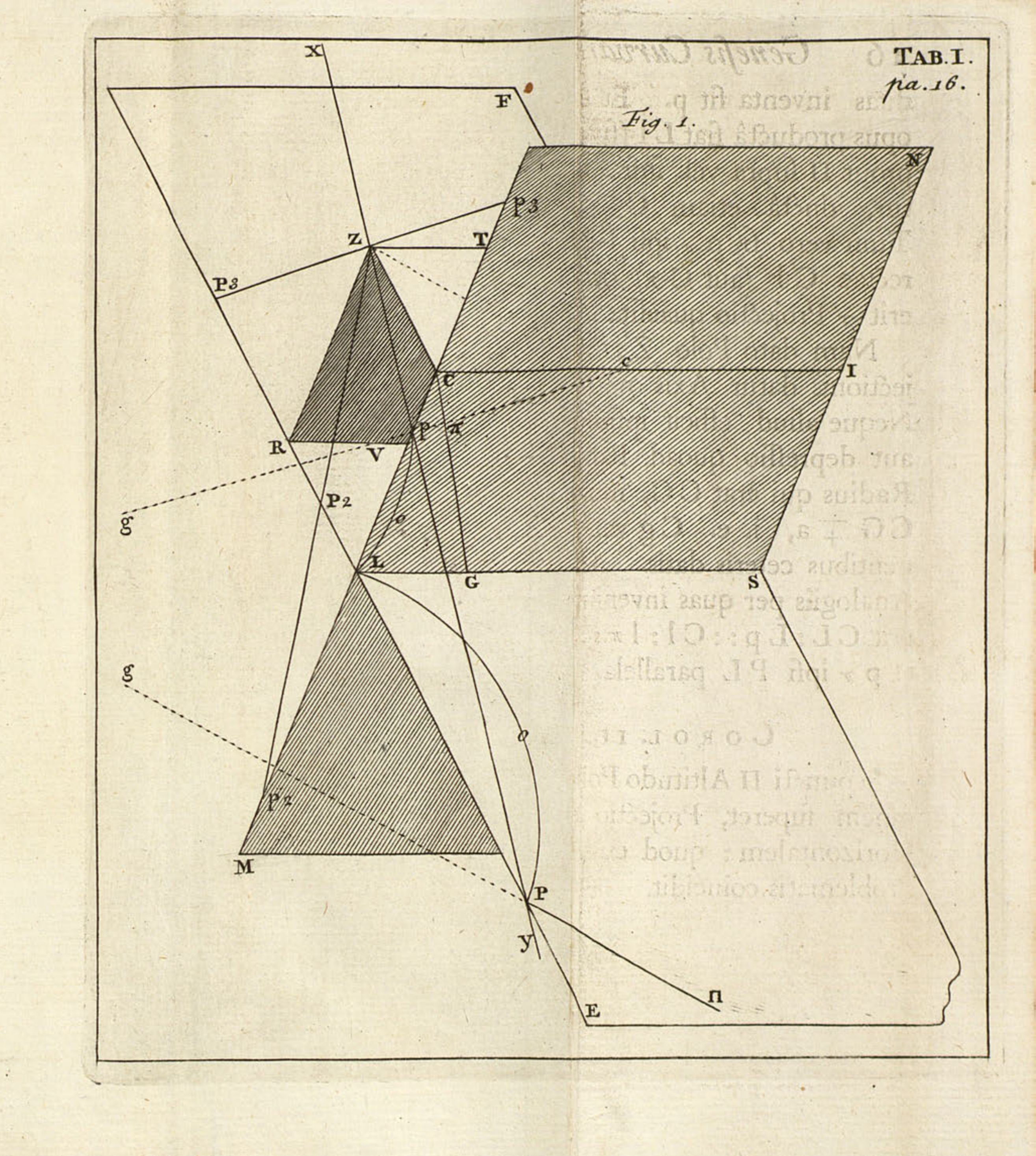
ditas

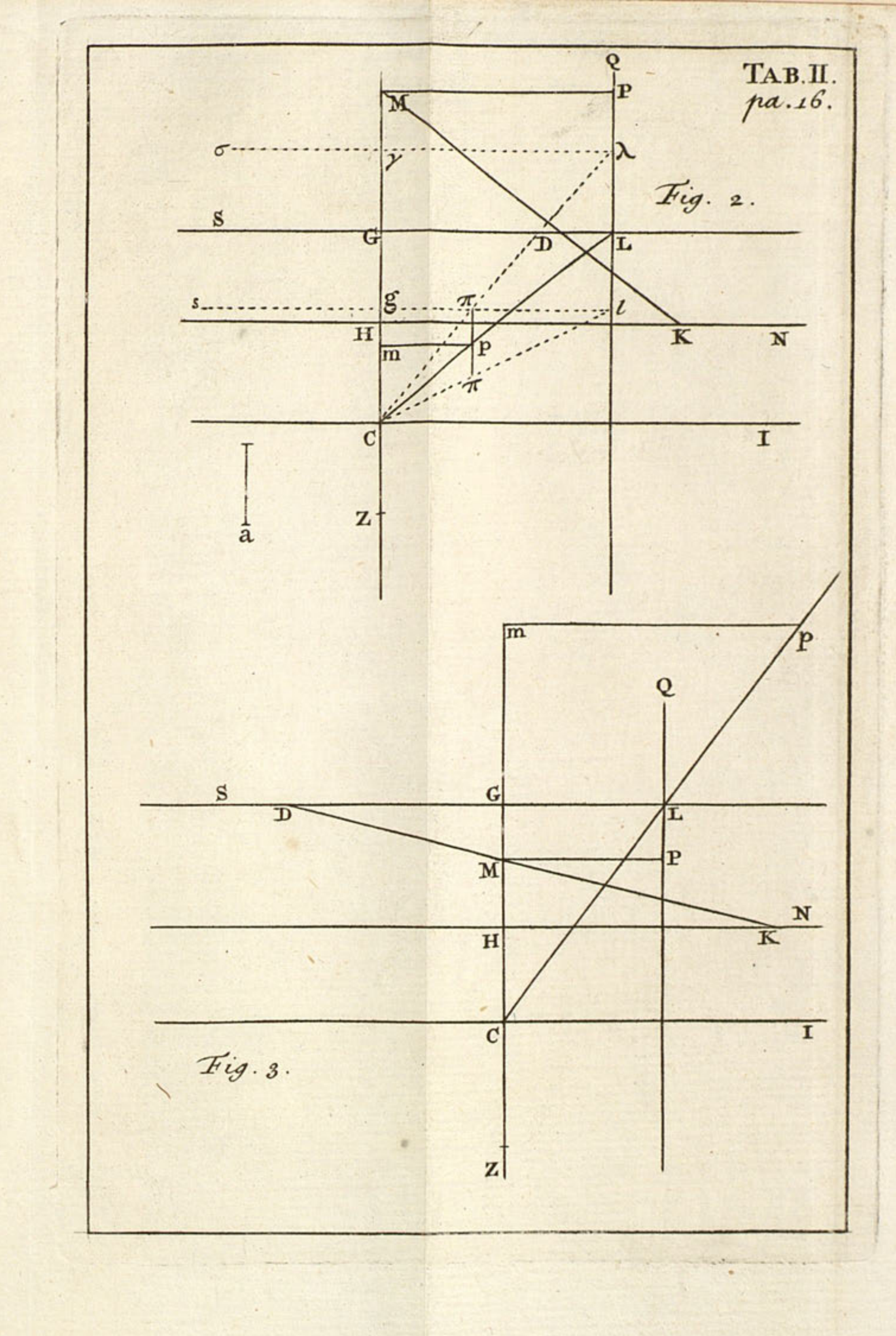
ditas inventa sit p. Et in P L, si opus productâ fiat L l (sive L λ) $=$a, prout Π supra vel infra Basin locatur, ductâ etiam C l (sive C λ.) Tum vero si p π ipsi P L parallela rectae C l (aut C λ) occurrat in π, erit π Projectio quaesita.

Nam dato Polo Z ac Plano Projectionis datur Axis normalis Z C. Neque aliud efficit ipsius Π elevatio aut depressio quoad Basin, nisi ut Radius qui erat C G, nunc factus sit C G $\mp$ a, i. e. C g vel C γ, manentibus ceteris datis. Adeoque ex Analogiis per quas inveniuntur p, π, erit C L : L p : : C l : l π : : C λ : λ π; et p π ipsi P L parallela.

COROL. II.

Si puncti Π Altitudo Poli Z Altitudinem superet, Projectio erit supra Horizontalem : quod cum *Casu* 3° Problematis coincidit.


TAB. I.
pa. 16.
Fig. 1.
X
F
N
P3
Z
T
P3
C
c
I
R
V
p
π
P2
g
o
L
G
S
g
o
P2
M
P
y
E
Π


TAB. II.
pa. 16.
Q
P
M
σ
γ
λ
Fig. 2.
S
G
D
L
s
g
π
l
H
K
N
m
p
π
C
I
a
Z
m
P
Q
S
G
D
L
P
M
N
H
K
C
I
Fig. 3.
Z

COROL. 12.

Rectilinei cujusvis Projectio e Projectionibus rectarum terminantium conficitur.

COROL. 13.

Polo Z in infinitum remoto, ut sit ZP rectae cuidam datae semper parallela, fiet Projectio, quae dicitur *Orthographica*; quam, per easdem Regulas huic Casui accommodatas, facile describes.

Atque haec de Rectilineorum Projectione sufficiant. Exempla enim, Regulasque illas multiplices de Objectorum particularium descriptione lubens omitto; tum quod ad praesens institutum parum faciant, praesertim vero quod ejusmodi regulas maximam partem inutiles existimem: Qui Perspectivae operam dat, Artem practicam per Praxin ediscat. Principia modo jam posita rité intelligat, cetera proprio marte, assumtis plurimis ex-

emplis, felicius exequetur. Operationum compendia inter operandum se prodent; cuique sua, adeoque optima, quae memoriâ vix excident, aut si forte exciderint, facilius revocanda.

Notandum denique figuram, ut in praecedentibus, delineatam, Objecti propositi imaginem, oculo in Polo Projectionis posito, tum demum exhibere, si in alterâ Schematis facie eaedem lineae inscribantur. Verus enim imaginis situs is est qui ex aversâ Schematis facie, tanquam pellucidi, conspicitur, ut ex demonstratione liquet. Is autem simul ac semel obtinetur, si capiantur puncta P, C ad alteras partes rectae L S. Nos eâ utimur Constructione quae demonstrationi propior videatur, neque a proposito nostro aliena.

SECTIO II.

1. *De generalibus Projectionum Symptomatis Geometricis.*

I.

IN Plano Basis sit recta quaevis lineae Basis occurrens, et in eâ punctum P; quo *major*, aut *minor* est puncti hujus distantia a linea Extremorum, eo *minus* aut *magis* distabit ipsius Projectio a Lineâ Horizontali. Unde facile colligitur Curvae cujusvis *Crura infinita* in *Horizontalem* projici. An autem Horizontalis Curvae *Genitae* evadat *Asymptotos*; an ipsam *secet* aut *contingat*, et in *quibus* punctis, ex Projectione *Tangentis* ad distantiam infinitam semper dignosces.

II.

Puncti illius P, *post* lineam Extremorum positi, ut in *Cas.* 3° Proble-

matis, Projectio erit *ad alteras partes Plani Verticalis et Lineae Horizontalis*, in angulo sc. ad Verticem C opposito illi in quo fuerat dum punctum *ante* Lineam Extremorum versabatur. Et ductâ Subtensâ, aut binis contingentibus, *plaga Convexitatis* Arcus cujusvis innotescet. Hinc etiam, an Curva *contrarium flexum* ad *Horizontalem*, ex projectione, acceperit, intelliges.

III.

Datis positione Polo, ac Basi cum Figura inscripta, *Varia Plani Projectionis distantia Figurae genitae Speciem nullatenus mutat*, modo Planum illud situm conservet sibi parallelum. Sic enim Projectiones omnes sunt similes ejusdem solidi Conici Sectiones, magnitudine tantum diversae. Quoties igitur solam Figurae Speciem contemplamur, Plani Projectionis distantia quaevis indifferenter assumi poterit.

IV.

IV.

Mutetur utcunque Planorum ad invicem Inclinatio; vel etiam, servatâ inclinatione, mutetur Figurae expositae situs, et mutabitur Figurae projectae Species *homologa* (exceptis projectionibus quibusdam subcontrariis): At manebit Species *homonoma*, seu figurae *nomen commune*, quamdiu figura exposita ad easdem partes Lineae Extremorum locatur.

V.

Eousque mutetur Planorum Inclinatio, aut Figurae datae Positio, ut ipsam secet Linea Extremorum; et *Projectio, ex unaquâque intersectione, bina Crura Hyperbolica accipiet.* Secet, v. g. in *Fig.* 5. Linea Extremorum H N Curvam R P p R in P, p punctis; et ductis ad eadem puncta contingentibus P Q, p Q, quae concurrant in Q; Punctis P, p contigua projicientur in quatuor Crura *Hyper-*

bolica ad *Asymptotos* é contingentibus ortas, in projectione ipsius Q se decussantes.

VI.

Motu feratur parallelo recta H N, quam pro Lineâ Extremorum usurpamus, donec Curvam contingat. Et *quo magis contingentium intersectio* Q *ad Curvae Verticem accedit, eo longius recedet ipsius Projectio.* Postquam vero in ipsum Verticem, id est in Lineam Extremorum, inciderit, *Asymptoti* quidem nusquam reperientur, et Crura ex *Hyperbolicis* fient *Parabolica.*

Eadem ratione, si Linea Extremorum Curvam in uno puncto secans in alio ipsam contingat, *erunt duo Crura Hyperbolica et totidem Parabolica.* Et figura genita erit ex illis quae *Hyperbolo-Parabolæ* nominantur.

VII.

Plana *Basis* et *Projectionis*, ut jam monitum, sunt *reciproca*; adeoque et Lineae *Extremorum* et *Horizontalis*. Unde liquet quod *Curvam quamlibet* (C) *alterius Curvae* (K) *projectione genitam concipere liceat*. Projectâ sc. C in K, Plana ista Vices alternent et redibit K in C.

VIII.

Et quum recta quae Curvam contingit ad intersectionem Lineae Extremorum abeat in Asymptoton; vicissim *redibunt Asymptoti Extrema in contactum* ad Lineam Horizontalem. Ex quo deducitur, *Asymptoton rectam Curvae in tot punctis occurrere posse quot ipsa est dimensionum demptis duobus*: Duae nimirum intersectiones, é quibus conflatur contactus, perierant in Projectione. Sic *Asymptotos Lineae tertii ordinis*, *Curvam in unico Puncto*

secare potest; ea Hyperbolae Conicae nusquam.

IX.

Duo Crura Parabolica, quoties in Curva aliqua comparuerint, *numerum Asymptoton rectarum quas Curva habere poterat binario minuunt.* Sic in *Lineis tertii ordinis* (quae tres Asymptotos admittunt pro numero punctorum in quibus a lineâ Extremorum secari possunt) si duo Crura fuerint Parabolica, non relinquetur nisi unica Asymptotos ad duo Crura Hyperbolica.

X.

Linearum Occursus atque Inflexus quicunque in figura *Genitrice* manent quoque in *Genitâ*; nisi fuerint ad Lineam Extremorum. *Intersectio* Intersectionem, *Contactus* Contactum dabit, *Cuspis* Cuspidem, *Nodus* Nodum, Punctum *contrarii Flexûs* ejusmodi

modi punctum in Projectione; et sic porro.

XI.

Unde consequitur "*Curvam Genitam fore ejusdem Ordinis cum Genetrice.*" Quum enim Curvae Ordo per numerum punctorum in quibus rectae occurrere potest designetur, si recta aliqua Curvam expositam secet in punctis numero *n*, Projectae projectam in totidem punctis occurrere necesse est.

XII.

Excipe casum ubi Intersectio aliqua est ad Lineam Extremorum; quâ in infinitum projectâ, relinquentur Genitae intersectiones n — 1. Quae ipsa ratio est ob quam "*Ordinatae Assymptoto alicui parallelae in Æquatione Curvam definiente unâ dimensione deprimuntur.*"

Scholium I.

Haec omnia ex iis quae in *Sect.* I. tradita sunt ita facile elicias ut prolixiore Demonstrationum apparatu non opus sit. Neque aliud fere ad Projectiones quasvis ritè intelligendas requiras: Exinde enim Arcus cujusvis *plaga* et *convexitas* innotescent, quâ item ratione Crura infinita Figurae Genitricis ad *Horizontalem* redeant, ductu continuo ipsam *secantes* aut *contingentes*, forte etiam secundum eandem tanquam *Asymptoton* protensae. Quorum in sequentibus plura Exempla videre est.

Proderit tamen ut qui hujusmodi Enumerationes suscipere velit, a *Projectionibus rectilineis* initium ducat, in iisque se aliquamdiu exerceat. Rectae enim Curvis *adscriptae*, *Contingentes*, *Asymptoti*, *Triangula* aut *Parallelogramma*, ipsarum *Symptomata* in Projectionibus determinant atque optime produnt. Quo spectant Exempla

Exempla quae in *Fig.* 6 & 7 exhibentur.

In quibus est C z x y *Linea Horizontalis*, C *centrum* Projectionis, H N *Linea Extremorum*, L S *Linea Baseos*; et Triangulum P R T projicitur in p r t. Latera quoque Triangulorum in infinitum producta intelliguntur.

In Exemplo priore ubi Linea Extremorum extra Triangulum ponitur.

1°. Latera finita P R, P T, R T, dant latera finita p r, r t, p t.

2°. Lateris alicujus P T producti Segmentum P A quod termino P et lineae Extremorum interjacet, projicitur in infinitam p a. Recta infinita A X projicitur in infinitam a x, termino A abeunte in infinitè distantem a, et termino infinitè distante X redeunte in x ad Lineam Horizontalem. Infinita autem T X dat finitam t x, quoniam T non est ad Lineam Extremorum, et X redit ad Horizontem

tem in x. Nec diversa in reliquis ratio. Tres nempe rectae infinitae intra quas continetur triangulum, projiciuntur in totidem infinitas *alternatá* tamen punctorum A, E, I; et Punctorum X, Y, Z *denominatione*.

3°. Proinde si punctum aliquod fuerat intra Triangulum P R T, aut in Angulo Y R Z Verticali, aut forte in Spatio Z R T X sub Base R T, ejusdem projectio intra locorum istorum projectiones reperietur, in triangulo r p t, in triangulo z r y, aut in Spatio z r t x respectivé. Quod et de Curvae alicujus Arcu in locis praedictis constituto dicendum.

4°. In *Fig.* 7, ubi linea extremorum H N Latera Trianguli secat in Punctis E, I, res paullo aliter se habet. Latus quidem P T, quod non, nisi productum, lineae Extremorum occurrit, dat Projectionem p t finitam. At Latera ad puncta E, I, interrupta, abeunt in infinitum, et quae Latera r t, r p constituunt, sunt r y,

t y;

ty; r z, p z, projectiones infinitarum R Y, T Y; R Z, P Z.

5°. Quocirca punctum quod intra Triangulum P R T fuerat, projicietur extra triangulum p r t; si nempe fuerat in Triangulo I R E quod abscindit H N, Projectio erit in Spatio Verticali interminato *i r e*; sin fuerat intra Trapezium P I E T, projicietur in Spatium i p t e. Et vicissim, quae in Angulo Verticali Y R Z posita erant, invenientur intra Triangulum *y r z* sub Linea Horizontali. At quae fuerant sub Base P T in Spatio Z P T Y redibunt in Trapezium *z t p y*. Si, in utravis figura, de Spatio quaeritur in quod ingreditur linea Extremorum H N, quale est Spatium Z R T X sub Base R T; distinguatur illud in binas partes ad rectam H N terminatas *v.g.* in Z R E A X et E T A; quarum illa projicitur in *e r z x a*, haec autem in *e t a* interminatum supra Horizontalem.

SCHO-

Scholium 2.

Obiter notari potest, quod cum, ex natura Projectionum, constet rectam quamlibet atque ejusdem Projectionem Lineae Basis occurrere in eodem Puncto; Si (*Fig.* 6 & 7) dentur Punctorum P, T, projectiones p, t, et Linea Basis L S, dabitur et r Projectio cujusvis alterius Puncti R. Ductis sc. P R, T R quae lineam Basis secent in π, τ, rectae p π, t τ, si opus productae concurrent in r.

Adeoque si fuerit punctum R ad Curvam in cujus Plano sit recta P T, et sit p t recta aliqua assumta cujus intersectio cum P T sit σ, et per σ ducatur recta quaevis L σ S, ad quam sint rectarum P R, p r; T R, t r, intersectiones π, τ, erit puncti r Locus Curva ejusdem ordinis cum illa quam percurrit R.

2. *De Aequatione Algebraica Projectionem Curvilineam designante.*

Cas. I.

Ubi Plani Verticalis et Basis Intersectio est Linea Abscissarum Figurae Genetricis, aut huic Parallela.

In *Fig.* 8, sit ZHMC Planum Verticale Basin secans in HM, Planum Projectionis in Radio CG ($=r$), Horizontale autem in Axe ZC ($=a$); ducta ZH ipsi CG parallela Basi occurrat in H. Tum vero, si fuerit HM variabilis cujus terminus est H, termini M projectio m, in quo sc. ZM, CG se mutuo secant; erit, ob triangula ZHM, ZCm similia, HM : HZ (CG) : : ZC : Cm. Sive scriptis pro Abscissis HM, Cm (quarum illa a Lineâ Extremorum, haec a Centro

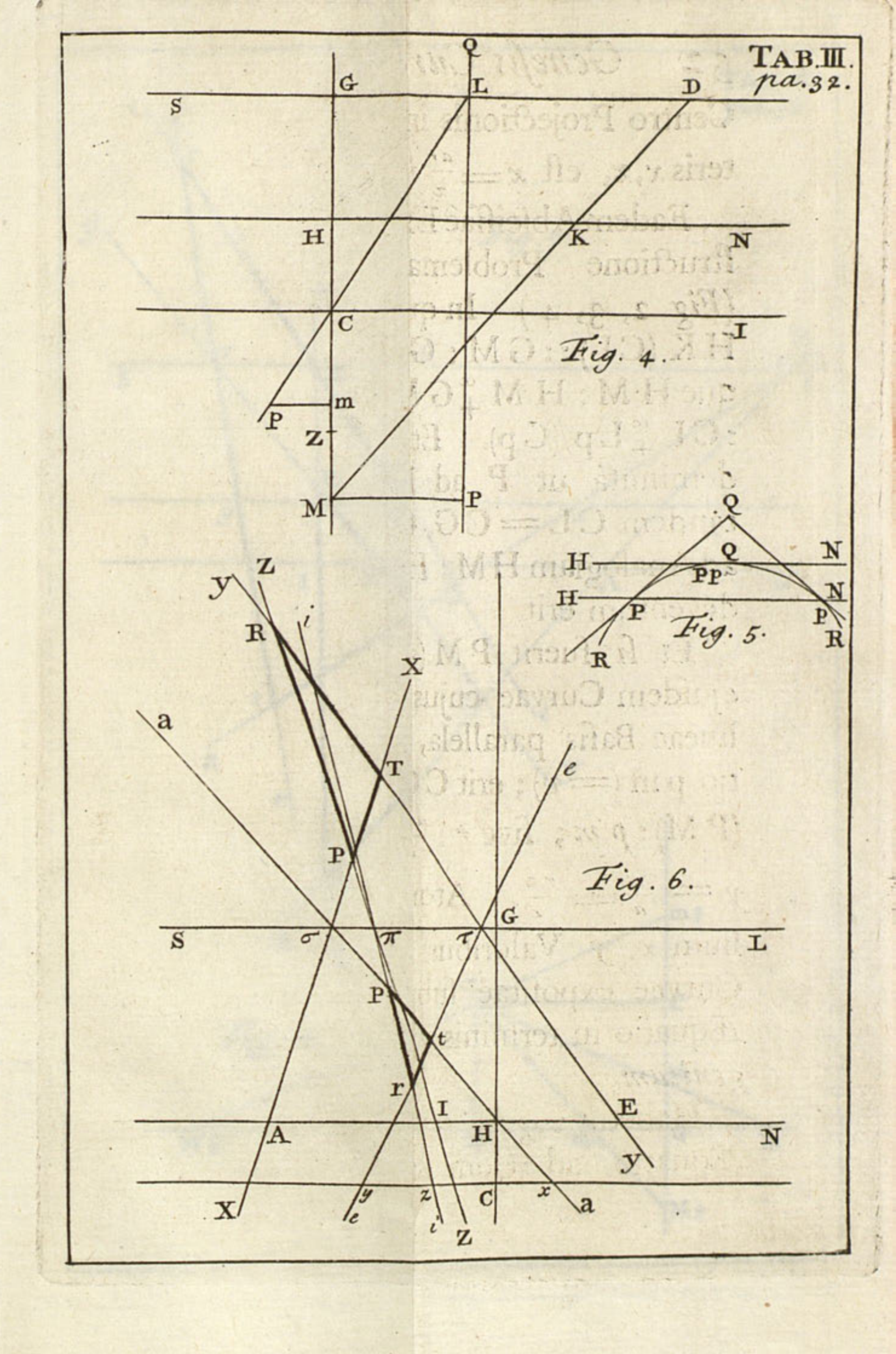
Centro Projectionis initium ducit) literis x, z, est $x = \frac{ar}{z}$.

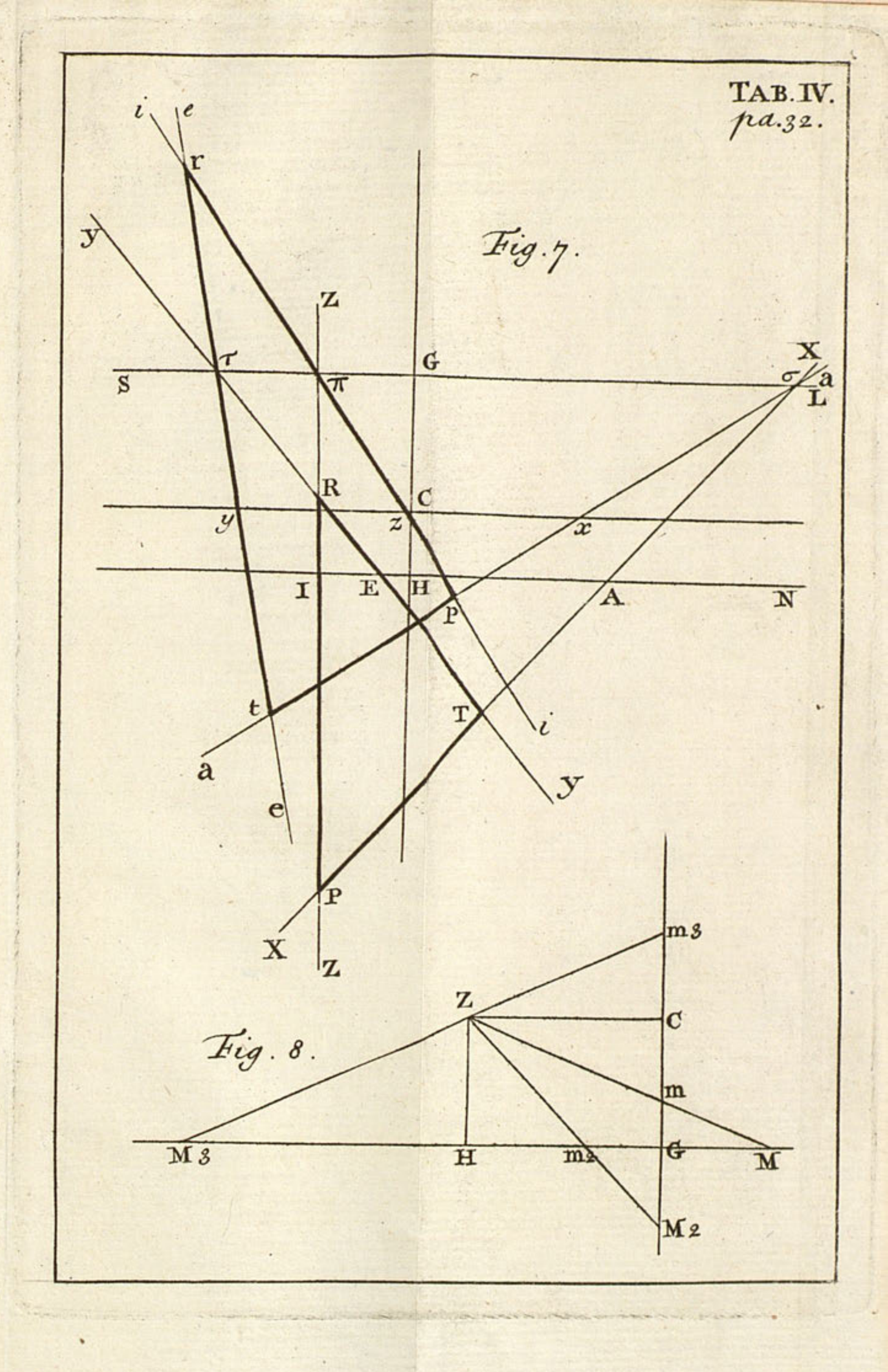
Eadem Abscissae Expressio ex Constructione Problematis deducitur. (*Fig.* 2, 3, 4) In quibus est HM : HK (CL) : : GM : GD(Lp). Adeoque HM : HM $\overset{\backsim}{+}$ GM (HG) : : CL : CL $\overset{\backsim}{+}$ Lp (Cp). Et distantiâ PM deminutâ ut P ad M accedat, erit tandem CL = CG, Cp = Cm; et ad Analogiam HM : HG : : CG : Cm deventum erit.

Et si fuerit PM ($= y$), Ordinata ejusdem Curvae cujus Abscissa est x, lineae Basis parallela, hujus Projectio pm ($= v$); erit CG : Cm : : GL (PM) : pm; sive $r : \frac{ar}{x} : : \pm y : v$; et $y = \frac{vx}{a} \stackrel{+}{=} \frac{rv}{z}$. Atque his Variabilium x, y Valoribus in Æquatione Curvae expositae substitutis, orietur Æquatio in terminis z, v, ad Curvam *genitam*.

Habetur *v.g.* $y^2 = px^2 + qx + s$ Æquatio ad Coni Sectiones; erit

v^2


TAB.III.
pa.32.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.


TAB. IV.
pa. 32.
Fig. 7.
i
e
r
y
Z
τ
π
G
X
σ
a
S
L
R
C
y
z
x
I
E
H
A
N
P
t
T
i
a
y
e
P
X
Z
m3
Z
C
Fig. 8.
m
M3
H
m2
G
M
M2

$v^2 = \frac{s}{r^2} \times z^2 + \frac{qa}{r} \times z + pa^2$. Sit $y^2 = px^3 + qx^2 + sx + t$, Æquatio ad quinque Parabolas divergentes *Neutoni*, et prodibit $v^2 z = \frac{t}{r^2} \times z^3 + \frac{sa}{r} \times z^2 + qa^2 \times z + pa^3 r$. In genere Æquatio $y^m = px^n + qx^{n-1} + sx^{n-2} + tx^{n-3} +$ &c. $+ w$, dabit Æquationem Curvae projectae $v^m z^{n-m} = p \times a^n r^{n-m} + q \times a^{n-1} r^{n-\overline{m+1}} \times z + s \times a^{n-2} r^{n-\overline{m+2}} \times z^2 + t \times a^{n-3} r^{n-\overline{m+3}} \times z^3 +$ &c. $+ w \times r^{-m} \times z^n$. Neque aliter procedendum ubi in Æquatione propositâ fuerint termini é potestatibus Variabilium x, y, in se ductis utcunque compositi.

Si Curvae expositae Abscissa sit recta (ut Q L *Fig.* 2.) Axi Projectionis Parallela, Æquatio, quoad formam, non differet a praecedente, nisi quod pro *Radio primario* C G accipiendus sit *Secundarius* C L $= r$; et quod

Ordinatae projectae fiant ad Abscissam *Obliquae* in angulo dato.

Cas. II.

Ubi Linea Extremorum Abscissam oblique secat.

* Sit P Π (*Fig.* 1.) Linea Abscissarum Figurae Expositae, quae producta lineae Extremorum RV occurrat in H, et sit H Π Abscissa quaevis $= x$. Per Polum Z et rectam H P Π duci intelligatur Planum cujus intersectio cum Plano Projectionis sit recta p π c, Projectio sc. rectae P Π in infinitum productae. Et ad Punctum c in quo haec Lineae Horizontali occurrit, junctâ Z c, productâ etiam c π p ut rectae H P Π occurrat ad Lineam Basis L S in Puncto g, positis $a =$ Z c, $r =$ c g, c π $= z$, erit ut in Casu praecedente $x = \frac{ar}{z}$.

Transformetur deinde Æquatio Curvae cujus Abscissa est H Π, in aliam

* Supple quod deest in *Figura*.

liam quae ſit ad Ordinatas lineae extremorum parallelas; et ſi Ordinatam novam litera *y*, eam Curvae projectae literâ *v* deſignes, erit etiam nunc $y = \frac{rv}{z}$; ceteraque ut in *Caſ.* 1. conſequentur.

Si denique Aequatio modo inventa ad formam ſimpliciorem reducenda eſt, id quidem per transformationem novam obtineri poterit. Si v. g. eam more *Neutoniano* deprimere velis, *invenienda eſt Aequatio ejuſdem Curvae quae ſit ad Ordinatas Aſymptoto alicui parallelas.* Calculum prolixum magis quam difficilem, brevitatis cauſâ omitto.

Neque vero id nunc agitur ut Curvarum affectiones, quatenus Aequationibus Algebraicis deſignantur, operoſius tractemus; praeſertim quum Vir doctiſſimus *Jacobus Stirling* in libro ſingulari, *Lineae tertii Ordinis* inſcripto, id jam praeſtiterit: plurimaque ejuſdem Argumenti in *Geometriam* ſuam *Organicam* retulerit

Clariss. D. Mac Laurin; pauca tamen, atque in genere, de Aequationibus Opusculo huic inserenda erant, quo Tyrones *Harmoniam* illam, quae inter *Transformationes* quasvis *Algebraicas* easdemque *Geometricas* inviolata manet, facilius percipere queant.

Adnotari etiam poterat, ex Variabilium x, y, Valoribus modo inventis constare, *Aequationem Projectionis fore ejusdem Ordinis cum Aequatione curvae expositae*; id quod cum rationibus Geometricis (*Art.* XI. *praeced.*) probe congruit. Et, si Curvae *Genitricis* Aequatio *fluxionalis* fuerit, ejusmodi fore Aequationem *Genitae*; quae itaque per *Methodum Fluxionum inversam* describenda erit.

SECTIO

SECTIO III.

De Projectione Sectionum Conicarum.

CONI Sectiones sunt tres illae Figurae Geometris notissimae, *Ellipsis*, *Parabola*, *Hyperbola*; quibus adjiciuntur nonnunquam *Circulus* et *Triangulum* rectilineum, seu potius *binae rectae* Superficiei Conicae inscriptae. Nempe si planum secans fuerit Basi circulari Parallelum, aut huic *subcontrarié* positum, fit Sectio *circularis*; et si planum quod Sectionem efficiebat *Hyperbolicam* parallelôs moveatur, donec per Verticem transeat, Sectio erit rectilinea, id est *Hyperbola* cum *Asymptotis* coïnciderit. Si plana quae Sectiones efficiebant *Parabolicam* et *Ellipticam* similiter moveantur, degenerabit *Parabola* in *rectam*, *Ellipsis* in *Punctum*.

Quum itaque in omnimoda Circuli Projectione, Planum Projectionis *Conum* secet, cujus *Vertex* est Polus Projectionis, Projectiones erunt ipsae illae Figurae modo memoratae. Nec minus constat, *Conum* ex Basi quâcunque *Ellipticâ*, *Parabolicâ* aut *Hyperbolicâ* (Sectionum oppositarum) oriundum, easdem praebere Sectiones; idque ob *reciprocas* Planorum Basis et Projectionis *vices*.

Circuli itaque Projectio, latius sumpta, totam doctrinam *Conicam* in se complectitur; proprietatesque omnes *Sectionum Conicarum* exinde deduci possunt et Demonstrationibus Geometricis firmari. Nobis Exempla quaedam, Speciminis loco, proposuisse satis erit, quibus methodi hujus Indoles atque Usus aliqua ex parte illustrentur.

Exempl. I. *Fig.* 9.

1. Sit recta L S *Linea Baseos*, H N *Linea Extremorum*, C I *Horizontalis*,

lis, A P T B Circulus per cujus centrum ducitur *Planum Verticale* secundum Diametrum A B; ſitque recta H N extra Circulum poſita. Inveniatur Diametri A B Projectio a b; ductiſque a puncto H, in quo Linea Extremorum Plano Verticali occurrit, rectis H T, H T Circulum contingentibus in T, T, rectâque T T in t t projectâ, *Ellipſis* a p t b, Axibus a b, t t deſcripta erit Projectio Circuli dati A P T B.

Quum enim rectae A H, T H, T H concurrant ad Lineam Extremorum, quae Ellipſin contingunt in t, t, erunt Axi a b Parallelae, id eſt, erit t t Axis ipſi a b conjugatus.

2. Poſitis $y =$ P M Ordinatae Circuli, $x =$ Abſciſſae H M, $d =$ Diametro A B, $l =$ H B diſtantiae Circuli a Lineâ Extremorum, erit $y^2 = -x^2 + \overline{d+2l} \times x - \overline{d+l} \times l.$ Scriptiſque, ut ſupra, $v =$ p m Ordinatae Projectae, $z =$ Abſciſſae C m, H G $= a$, C G $= r$, Aequatio Pro-

jectionis erit $v^2 = -\frac{\overline{d+l} \times l}{r^2} \times z^2 + \frac{\overline{d+2l} \times a}{r} \times z - a^2$; ad *Ellipsin Specie datam*, modo detur Coefficiens termini $-z^2$. Axes enim a b, t t erunt ad invicem ut sunt r et $\sqrt{\overline{d+l} \times l}$, sive ut C G et tangens H T. Unde plura de hâc Sectione proponi solita resolvas.

3. Ut si Conus (*Fig.* 10.) B T A Z Circulo B T A insistens, quem Planum Basi normale, secundum Diametrum, secat, Triangulum efficiens B A Z, Plano altero secandus sit, ut fiat Sectio *Ellipsis Speciei datae*; productâ (si opus utrinque) Diametro A B ad hanc inflectatur a Vertice Z recta Z H ut sit rectangulum A H × H B ad H Z q, in ratione (F ad G) datâ, duplicata sc. illius quam habiturus est Axis Plano Verticali perpendicularis ad Axem alterum; ductâque rectâ C G ipsi H Z Parallelâ, si secundum hanc secetur Conus Plano quod

quod ſit ad Planum Verticale rectum, erit Sectio Speciei imperatae.

Demiſſo autem Perpendiculo Z I, recta Z H inflectitur per Conſtructionem Aequationis quadraticae $\overline{G - F} \times x^2 + \overline{G \times AB \pm 2BI \times F} \times x = F \times ZBq.$ In quâ ſi prodierint Radices x, ſeu BH, ejuſdem Signi, erunt Puncta H utraque ad partes B; ſi fuerint Aequales, *unica* Z H ad *maximam* rationis $\frac{F}{G}$ quantitatem pertinebit. Sin impoſſibiles evaſerint, ratio imperata fuit nimia.

Hujus vero maxima quantitas ſtatim determinabitur, ſi, in Triangulo ZBA ductâ quavis p s diametro BA Parallelâ, quam biſecet t u in r, Triangulum abſcindens Iſoſceles Z t u; fiat ut rectangulum $ur \times rt$ ad $rs\,q$: ita $tu\,q$ (G) ad quartam (F); erit enim ratio $\frac{F}{G}$ maxima quam uſurpare liceat. Vel etiam ductâ Z h ipſi t u Parallelâ erat $\frac{F}{G}$ *maxima* $= \frac{Ah \times hB}{Zhq}$.

In Cono recto maxima haec ratio eſt aequa-

aequalitatis, quando sc. Planum secans sit Basi Parallelum.

4. Si fuerit C G vel Z H Contingenti H T aequalis, erit Projectio *Circulus*; est enim $\frac{\overline{d+l}\times l}{r^2} = 1$. Et quum sint A H, H Z, H B continue Proportionales, est Angulus H A Z = Z b a (6. *el.* 6.) id est, Sectio secundum a b sit Basi A B *subcontraria*.

5. Hactenus posuimus Lineam Extremorum H N Circulum A B T non attingere. Nunc vero contingat in B, et propter $l = 0$, Aequatio Projectionis erit $v^2 = \frac{da}{r} \times z - a^2$, ad Parabolam vertice a, Parametro $\frac{da}{r}$ descriptam: quae itaque datis d, r, sive, in *Fig.* 10. rectis A B, Z B vel Z A, Axi Projectionis a erit Proportionalis, et Magnitudinis cujusvis datae accipi potest.

6. Secet deinde Circulum ut in T k T, *Fig.* 9. isque projicietur in Sectiones oppositas, Verticibus a, b, Centro

Centro h, in quod Tangentium TH, concursus projicitur, ipse autem tangentes abeunt in Asymptotos. (*Supple Figuram.*) Et quum facta sit l Negativa, Aequatio Projectionem designans erit $v^2 = \frac{\overline{d-l}\times l}{r^2} z^2 + \frac{\overline{d-2l}\times a}{r}$ $- a^2$. Ex quâ, non secus ac in Ellipsi factum est, *Hyperbolam* Speciei imperatae obtinebis.

7. Sit denique Curva exposita Sectio quaevis Conica quam in Circulum aut aliam Sectionem Speciei assignatae projicere velis. Sit v. g. in *Fig.* 9, 10, A B T *Ellipsis* cujus Axis AB $= t$, huic conjugatus $= c$, manentibus reliquis Symbolis, eritque Projectionis Aequatio $v^2 = -\frac{\overline{c^2 \times \overline{t \pm l} \times \pm l}}{t^2 r^2} z^2 + \frac{ac^2 \times \overline{t \pm 2l}}{t^2 r} z - \frac{c^2 a^2}{t^2}$; et Regula de inflexione rectae ZH hic etiam valebit. Invenietur sc. inclinatio Plani CG, in quo Projectio futura est *Ellipsis* aut *Hyperbola* Speciei datae, si capiatur

$\frac{\overline{t \pm l} \times l}{r^2}$, sive $\frac{AHB}{ZHq} = \frac{t^2}{c^2} \times \frac{F}{G}$; aut si quaeratur *Circulus*, $\frac{AHB}{ZHq} = \frac{t^2}{c^2}$.

SCHOLIUM I.

Hinc obiter *Projectionis* illius *Stereographicae* ratio reddetur.

1. Sit enim Z punctum in Superficie *Sphaerae*, CG intersectio Plani Paralleli Circulo cujus Polus Z, cum Plano Verticali; BTA Circulus projiciendus, diametro BA, cujus Plano occurrat HZ ipsi CG Parallela in Puncto H, a quo duci intelligatur HT Circulum BTA contingens in T. Quoniam igitur sunt Puncta Z, T ad Sphaerae Superficiem, erunt contingentes ZH, TH Aequales, et *Projectio* in Plano CG, aut alio quovis huic Parallelo, *Circulus*. *Per Art.* 4. *hujus Exempli.*

2. Angulum BZA bisecet recta ZV, diametro BA occurrens in V, ipsi autem ba in v. Ea producta in Polum Circuli BTA incidet (26. *el.* 3.) cujus

cujus itaque Projectio erit v. Ad Punctum V erigatur Planum Plano Projectionis Parallelum, sive Basi B T A *Subcontrarium*, quod Planum verticale secet in V Q. Et si circa Z V tanquam Axem revolvi intelligatur Planum, planum *Baseos* atque *illud* quod per V Q ducitur perpetuo secans, liquet Angulos quos efficiunt intersectiones cum rectis V A, V Q fore ubique aequales, planis nimirum ad Axem revolutionis eodem prorsus modo se habentibus. Anguli autem in Plano V Q Angulis in v a aequantur (16 & 10. *el.* 11.): Hi itaque aequales erunt Angulis in Plano B T A, aut in quovis huic Parallelo; in illo speciatim quod Sphaeram tangit in Polo Circuli B T A. Ex quo deducitur, *Angulos quosvis in Superficie Sphaericâ eosdem manere in Projectione:* quod idem ex projectione rectarum quae Sphaeram in puncto quovis contingunt, facile elicias.

3. Puncta V, v, diametros A B, b a similiter dividunt; adeoque *recta quae per Polum projectum* v *ducitur Arcus abscindit Arcubus expositis similes*, ad alternas tamen punctorum V, v, plagas: Ut si, *Fig.* 11, sit a b Projectio Diametri A B, et in eâ Polus projectus v, et quaeratur Arcûs cujusvis A C Projectio a c. Sectâ A B in V ut sit A V : B V : : b v : a v, ductâque C V quae Arcum abscindat B K, huic similis a c erit Arcus quaesitus.

Scholium 2.

Nec difficilius Projectionem *Gnomonicam* sive *Horologicam* explicabis.

Assumto scilicet pro Polo Projectionum ipso Sphaerae *Centro*, Circuli omnes *majores* projicientur in *Rectas*. Quarum quae *Meridianos*, sive Circulos *Horarios*, exhibent, ad *Polum* Mundi *projectum* convergent. *Meridianus* autem, qui est Plano Horologii

logii normalis, ipſum ſecabit in Lineâ *Subſtilari.* Et ſi in ejuſdem Meridiani Plano, erigatur a Centro (C) recta (C E, quae ſit *Axi* perpendicularis, Horologii Plano occurrens in E, et ab hoc puncto ducatur *Subſtilari* normalis E Q, utrinque infinité producta, erit haec Projectio *Aequinoctialis* Circuli. Poſita itaque C E Radio, recta E Q ejuſdem Tangentem repraeſentabit. Unde, in eadem E Q, Segmentum quod Arcui cuilibet *Aequinoctialis*, Magnitudine et Poſitione dato, debetur, ſemper abſcindi poterit, adeoque Lineae Horarum *Indices* deſcribi.

Circuli *minores* dati projicientur in *Coni Sectiones* datas, modo detur Poſitione Horologium. *Tropicorum* praecipue utilis eſt Projectio in delineandis Horologiis *Babylonicis* et *Italicis*, (verticaliter plerumque erectis) in quibus dies non a *Meridiano* inchoatur, ſicut ubique alias feré gentium, ſed ab *Horizonte*, id eſt ab

Ortu

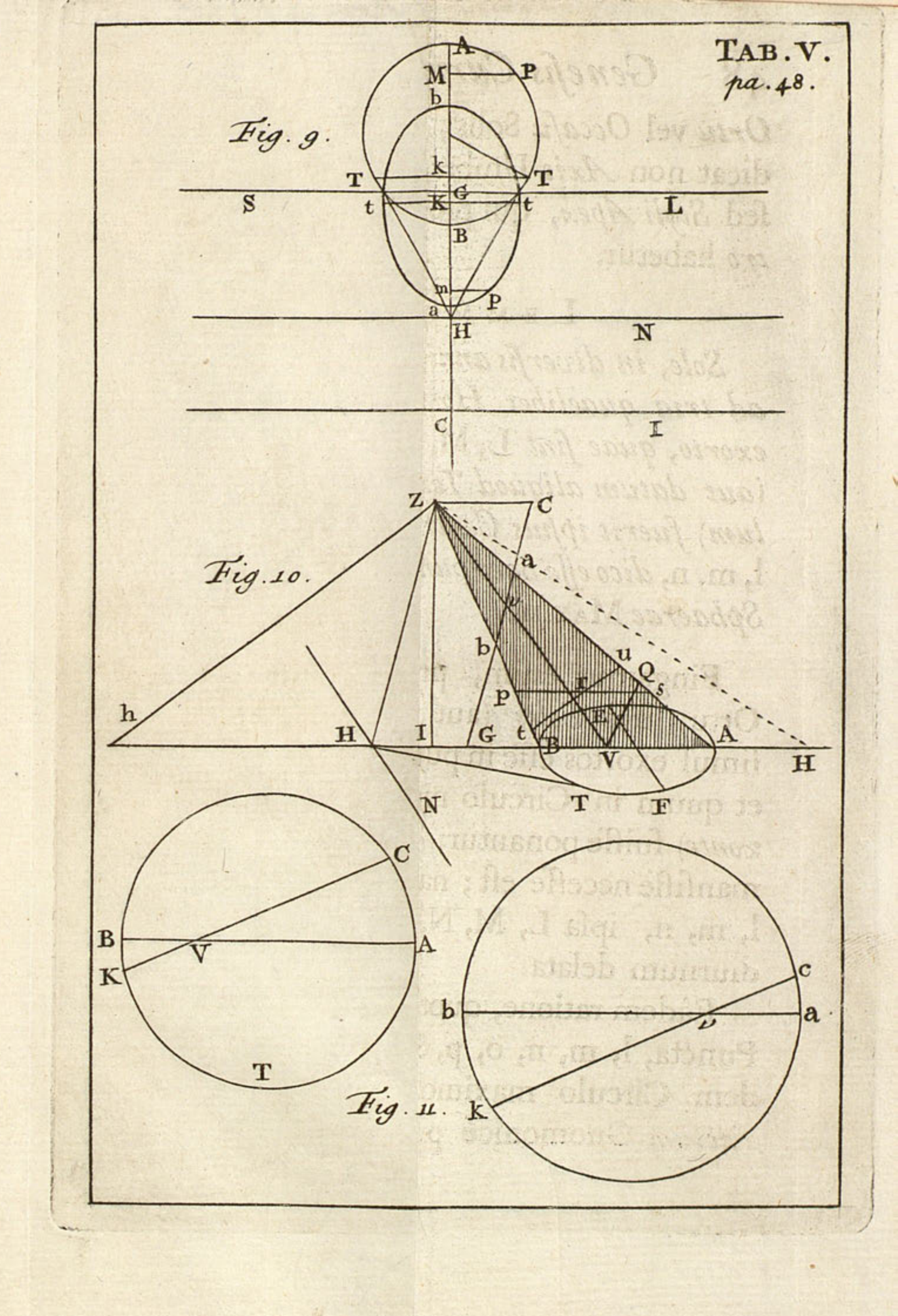
Ortu vel *Occasu* Solis; Horasque indicat non *Axis* Umbra, ut in nostris, sed *Styli Apex*, qui pro *Sphaerae centro* habetur.

L E M M A.

Sole, in diversis anni tempestatibus, ad tria quaelibet Horizontis puncta exorto, quae sint L, M, N, *post horam (aut datum aliquod Temporis Spatiolum) fuerit ipsius Centrum in punctis* l, m, n, *dico esse haec puncta in Circulo Sphaerae* MAXIMO.

Fingamus enim, pro terno Solis Ortu, tres *Soles* (aut potius *Fixas*) simul exortos esse in punctis L, M, N; et quum in Circulo maximo (*Horizonte*) fuisse ponantur, in eodem permansisse necesse est; nam sunt puncta l, m, n, ipsa L, M, N, per Motum diurnum delata.

Eâdem ratione, quotlibet ejusmodi Puncta, l, m, n, o, p, &c. sunt in eodem Circulo maximo. Qui si in *Rectam* Gnomonicé projiciatur, erit haec


TAB. V.
pa. 48.
Fig. 9.
A
M
P
b
k
T
T
G
S
t
K
t
L
B
m
P
a
H
N
C
I
Fig. 10.
Z
C
a
v
b
u
Q
s
P
r
p
E
h
H
I
G
t
B
V
A
H
N
T
F
C
B
V
A
K
T
c
b
a
v
k
Fig. 11.

haec *Linea horaria* qua tempus datum ab *ortu* vel *occasu* Solis rité definitur.

In hujusmodi itaque Horologiis, projectis *Polo* (P), *Aequinoctiali*, *Horizonte* et *Tropico*; notetur Punctum (T) in quo *Tropicus Horizontem* secat, Occasum versus in Horologio *Babylonico*, ad Orientem in *Italicis*: Sunt enim haec Puncta in quae projicitur *Solis* Orientis et Occidui Centrum dum in *Solstitiis* versatur, ex quibus utique Horas subinde dinumeres. *Meridiani* autem per T transeuntis Projectio, id est recta P T, *Aequinoctiali* E Q, occurrat in I. Exinde initio sumpto, abscindantur Aequinoctialis Segmenta singulis Horis debita, quorum Termini sint in Punctis A, B, C, &c; et per eadem A, B, C, &c. rectae a Polo exeuntes, *Tropico* occurrant, singulae in binis Punctis A, a; B, b; C, c; &c. Sit etiam H Punctum illud in quo *Aequinoctialis* et *Horizon* se mutuo secant:

Et si a Puncto H abscindantur ad easdem plagas, Segmenta Horaria in Punctis α, β, γ, &c. terminata, junctis Aα, aα; Bβ, bβ; Cγ, cγ; &c. erecto utrinque Stylo, deletisque Superfluis, perficietur Horologium.

Illud tantùm monere liceat, quod si fuerat Intersectio a in *Hyperbolae* Sectione oppositâ illi in quâ sunt Intersectiones T, A, recta aα alteri Horologii faciei inscribenda sit. *Tropici*que Projectione nos prae ceteris uti, quod per ipsam Lineae horariae circumscribantur *.

Projectionem Sphaerae *Orthographicam* ut perfacilem omitto.

Exempl. II.

1. Quando Polus Projectionis Z, extra Planum Verticale per Axem, locatur (quem quoque Casum in *Fig.* 10. exhiberi ponimus,) si detur Positione, Planum Projectionis dabitur et Linea Extremorum H N. Huic

Parallela

* *Supple Figuras.*

Parallela Diameter E F, ſit c, ipſi autem conjugata, t; ceteriſque ritu praecedentium peractis orietur aequatio ejuſdem formae Projectionem deſignans. Datur enim Angulus Ordinatarum per *Corol.* 8. *Sect.* I. Idem fieri poterat ducendo Planum cui recta H N ſit normalis, et cujus Interſectiones cum Planis datis pro Lineis abſciſſarum uſurpentur.

2. At ſi *invenienda ſit ea Plani Secantis Poſitio quae Sectionem efficiat Specie datam*, incidimus in Problema illud *Solidum* a *Carteſio* olim aliiſque varié agitatum; inter quos eſt Illuſtr. *Hoſpitalius*, *Sect. Conic. Lib.* 10. *Prop.* 10.

Nunc vero in inflexione rectae Z H, haec duo requiruntur: Primum ut ductâ Diametro H B A, ſit rectangulum A H B ad Z H q in ratione data; alterum, ut ductâ H N Ordinatis ad Diametrum A B Parallelâ, ſit Angulus Z H N rectus: *vel*, ſi Baſis ſit *Parabola*, Angulus Z H N

ſit rectus; et Rectangulum ſub H B et Parametro diametri H B ſit in ratione data ad H Z q; in ratione quidem Aequalitatis ſi Sectio imperata eſt *Circulus*.

3. Caſus Poſterioris Solutionem adjiciam; ſimpliciores nempe, reliquoſque in ſe complectentis; quum Baſis quaelibet in *Parabolam* facile convertatur, *Circulus* autem in Sectionem ſpecie datam, per *Exempl.* I. *Fig.* 12.

A Puncto dato Z in Parabolae planum demittatur Perpendiculum Z I, ipſi occurrens in Puncto I, a quo ad Axem fiat normalis I R: Et per H Punctum quaeſitum, ſi ſit Parabolae diameter H B, quae rectae I R occurrat in M, Curvae autem in B, ad B duci intelligatur contingens B X, et Ordinata ad Axem B L; et per H recta H N ipſi B X Parallela Axem ſecet in N. Junctis denique Z H, Z N, Z R, ſit N K ipſi H M normalis.

Tum

Tum vero si fuerit p Parameter ad Axem, erit $p + 2LX$ sive $p + 2HK$ Parameter ad Diametrum quaesitam H B, et B X q sive H N q $= \frac{1}{2} HK \times \overline{p + 2HK}$; additisque (ex conditione Problematis) aequalibus Z H q et rectangulo sub H B, vel N X, et Parametro $p + 2HK$, erit rectangulum $\overline{NX + \frac{1}{2} HK} \times \overline{p + 2HK}$, id est rectangulum $\overline{RV - KM} \times \overline{p + 2HK} = ZHq + HNq =$ (propter Angulos Z H N, Z R N rectos) $= ZNq = ZRq + KMq$.

Est autem M R q ($= HNq - HKq$) $= \frac{1}{2} HK \times p$, et $IM = IR - \sqrt{\frac{1}{2} HK \times p}$, atque H K : M R :: I M : H M. Unde erit K M ($= HM - HK$) $= \frac{IR \times \sqrt{\frac{1}{2} HK \times p} - \frac{1}{2} HK \times p}{HK} - HK$. Aequetur hic rectae K M valor illi qui prodit ex Aequatione quadraticâ $ZRq + KMq = \overline{RV - KM} \times \overline{p + 2HK}$, et scriptis pro incognitâ H K, x, pro datis

 p ×

$p \times RV + \frac{1}{4}p^2 - ZRq$, quadrato QQ, fiet $x^3 + \overline{p + 2RV} \times x^2 + QQ \times x - \frac{1}{2}p \times IRq = 0$. quae cum Aequatione D. *Hospitalii* paullo aliter inventâ plane congruit.

Datâ autem, per Constructionem Aequationis Cubicae, rectâ H K (= 2 L V) datur positione Diameter B H. Datur etiam per Aequationem Quadraticam K M, sive N R, et punctum N, a quo, N H, contingenti B X parallela et Diametro B H occurrens in H, erit Linea Extremorum, et Z H radius Projectionis quaesitus. Rectae autem K M valor negativus ad alteras partes Puncti R positus, alteram dabit Lineam Extremorum (h n) quae Proposito satisfaciet.

Exempl. III. *Fig.* 13.

Conisectionem per data quinque Puncta projicere, quorum tria non sunt in eâdem rectâ.

Sint

Sint Puncta data A, B, C, D, E; per quorum bis duo A, B; C, E; quae ducuntur rectae concurrant in M; at B C, A D in N; et fiat recta N M *Linea Extremorum*: aut si fuerint A B, C E Parallelae, accipiatur Linea Extremorum his Parallela quae per N ducitur. Assumtis deinde quibusvis L S, C I, pro *Lineâ Baseos* et *Horizontali*, quoniam sunt M, N Puncta ad Lineam Extremorum, erunt ipsarum A B, C E Projectiones a b, c e, Parallelae, ut et b c, a d; et quae has bisecant Diametri concurrent in Centro Projectae Curvae k. Dato autem Centro k, et ordinatim applicatis a b, c e; vel c b, a d, datur Conisectio. Vices alternent rectae M N, C I, et Conisectio a b c d e projicietur in A B C D E quaesitam. *Q. E. F.*

Scholium.

Quod si coisse censeantur duo Puncta B, C, Problema in hoc aliud convertetur. "*Conisectionem per tria puncta data describere, quae in dato puncto tangat rectam positione datam:*" aut, coeuntibus et binis aliis A, D, in istud, "*Consectionem describere quae per datum punctum transeat et binas positione datas in datis punctis contingat.*"

Sic etiam Problemata hujusmodi aliqua resolvi poterunt, quae vix aliter tractare liceret: qualia sunt illa *Neutoni*, *Prop.* XXV. XXVI. *Lib.* I. *Princip.* ipsâ hac Methodo soluta. Jam enim animadverterit Lector, *Transmutationem Curvarum* in *Lemmate* XXII. *Princip.* traditam ipsam esse *Curvarum Projectionem* de quâ nunc agitur, generaliter admodum, et sub-obscuré, descriptam. Haec ita se habere ex Locis modo citatis abunde liquet; ipsum

ipſum vero *Lemma* huc transferre non pigebit; quo etiam pateat quanti methodum hanc fecerit ſummus ille Vir, qui omnia ad *Geometriam* pertinentia animo percepiſſe et ſecum anté peregiſſe videtur.

Philoſ. Nat. Princip. Math. Lib. I.
Lemma XXII.

" Tranſmutanda ſit figura quaevis
" H G I, *Fig.* 14. ducantur pro lu-
" bitu rectae duae Parallelae A O,
" B L, tertiam quamvis poſitione da-
" tam A B ſecantes in A & B, et a fi-
" gurae puncto quovis G ad rectam
" A B ducatur quaevis G D, ipſi O A
" parallela. Deinde a Puncto aliquo
" O, in Linea O A dato, ad punctum
" D ducatur recta O D, ipſi B L oc-
" currens in d, et a Puncto occurſus
" erigatur recta d g datum quemvis
" Angulum cum recta B L continens,
" atque eam habens rationem ad O d
" quam habet D G ad O D; et erit
" g Punctum in Figura nova h g i
" Puncto

" Puncto G respondens. Eadem ra-
" tione puncta singula Figurae pri-
" mae dabunt puncta totidem Figu-
" rae novae. Concipe igitur Punc-
" tum G motu continuo percurrere
" puncta omnia Figurae primae, et
" Punctum g motu itidem continuo
" percurret puncta omnia figurae no-
" vae et eandem describet. Distinc-
" tionis gratia nominemus D G ordi-
" natam primam, d g ordinatam no-
" vam; A D abscissam primam, a d
" abscissam novam; O Polum, O D
" Radium abscindentem, O A Ra-
" dium ordinatum primum, et O a
" (quo Parallelogrammum O A B a
" completur) Radium ordinatum no-
" vum.

" Dico jam quod, si Punctum G
" tangit rectam lineam positione da-
" tam, Punctum g tanget etiam li-
" neam rectam positione datam. Si
" Punctum G tangit Conicam Sec-
" tionem, Punctum g tanget etiam
" Conicam Sectionem. Conicis Sec-

" tionibus

" tionibus hic Circulum annumero.
" Porro si Punctum G tangit Lineam
" tertii ordinis analytici, Punctum g
" tanget Lineam tertii itidem ordi-
" nis; et sic de curvis lineis superio-
" rum ordinum. Lineae duae erunt
" ejusdem semper ordinis analytici
" quas Puncta G, g tangunt. Ete-
" nim ut est a d ad O A ita sunt O d
" ad O D, d g ad D G, et A B ad A D;
" ideoque A D aequalis est $\frac{OA \times AB}{ad}$,
" et D G aequalis est $\frac{OA \times dg}{ad}$. Jam
" si Punctum G tangit rectam lineam,
" atque ideo in Aequatione quavis,
" qua relatio inter abscissam A D et
" ordinatam D G habetur, indetermi-
" natae illae A D et D G ad unicam
" tantum dimensionem ascendunt,
" scribendo in hac Aequatione $\frac{OA \times AB}{ad}$
" pro A D, et $\frac{OA \times dg}{ad}$ pro D G, produ-
" cetur Aequatio nova, in qua Ab-
" scissa nova a d et Ordinata nova d g
" ad unicam tantum dimensionem
" ascendent, atque ideo quae desig-
" nat

" nat Lineam rectam. Sin A D et
" D G, vel earum alterutra, ascende-
" bant ad duas dimensiones in Aequa-
" tione prima, ascendent itidem a d
" et d g ad duas in Aequatione se-
" cunda. Et sic de tribus vel pluri-
" bus dimensionibus. Indetermina-
" tae a d, d g in Aequatione secunda,
" et A D, D G in prima ascendent
" semper ad eundem dimensionum
" numerum, et propterea Lineae,
" quas Puncta G, g tangunt, sunt
" ejusdem ordinis analytici.

" Dico praeterea, quod si recta ali-
" qua tangat Lineam Curvam in Fi-
" gura prima; haec recta eodem
" modo cum Curva in Figuram no-
" vam translata tanget lineam illam
" curvam in figura nova; et contra.
" Nam si curvae puncta quaevis duo
" accedunt ad invicem et coeunt in
" figura prima, Puncta eadem trans-
" lata accedent ad invicem et coibunt
" in figura nova; atque ideo rectae,
" quibus haec Puncta junguntur, si-
" mul

" mul evadent curvarum tangentes in
" figura utraque.

" Componi possent harum asser-
" tionum demonstrationes more ma-
" gis geometrico. Sed brevitati con-
" sulo.

" Igitur si figura rectilinea in ali-
" am transmutanda est, sufficit rec-
" tarum, a quibus conflatur, intersec-
" tiones transferre, et per easdem in
" figura nova lineas rectas ducere.
" Sin curvilineam transmutare opor-
" tet, transferenda sunt puncta, tan-
" gentes, et aliae rectae, quarum ope
" curva linea definitur. Inservit au-
" tem hoc Lemma solutioni diffici-
" liorum Problematum, transmutan-
" do figuras propositas in simpliciores.
" Nam rectae quaevis convergentes
" transmutantur in parallelas, adhiben-
" do pro radio ordinato primo lineam
" quamvis rectam, quae per concur-
" sum convergentium transit; idque
" quia concursus ille hoc pacto abit
" in infinitum; lineae autem Paral-

" lelae

" lelae sunt, quae nusquam concur-
" runt. Postquam autem Problema
" solvitur in figura nova ; si per
" inversas operationes transmutetur
" haec figura in figuram primam,
" habebitur solutio quaesita.

" Utile est etiam hoc Lemma in
" Solutione solidorum Problematum.
" Nam quoties duae Sectiones Coni-
" cae obvenerint, quarum intersec-
" tione Problema solvi potest, trans-
" mutare licet earum alterutram, si
" Hyperbola sit vel Parabola, in El-
" lipsin: deinde Ellipsis facile muta-
" tur in Circulum. Recta item et
" Sectio Conica, in constructione
" planorum Problematum, vertuntur
" in rectam et circulum."

Haec Neutonus, quibus ubique feré gemina sunt quae in *Sect.* II. habentur. Referunt scilicet, in Figura *Lemmatis*, Punctum O *Polum*, a *Centrum* Projectionis, a B (= A O) *Radium*, A Punctum in quo Abscissa

B I

B I ſecat *Lineam Extremorum:* et ſi Angulus datus g d i is ſit qui ex data Plani Verticalis (*ſecundarii*) O A B a Poſitione conſequitur, erit Curva g h i Projectio datae G H I. Quod enim *Neutonus* Curvam utramque in Plano O A B a deſcriptam ponat, id quidem nihil mutat: quamvis *Tranſmutationem* hanc ſub verae *Projectionis* ſpecie facilius plerumque contempleris.

Exempl. IV.

Orbitam Planetae Ellipticam determinare.

Orbitae Planetariae *Speciem*, *Magnitudinem*, *Poſitionem*, determinare, ut apud Auctores praecipitur, opus eſt taedii pleniſſimum; re ſcilicet per plurium Propoſitionum antecedentium ambages traducta *. Methodus autem Projectionum Regulam indicat, ut videtur probabilem, quâ

* *Vid. Gregor. Aſtron. Lib.* III.

quâ eadem levi opera inveſtigentur. Hanc Aſtronomorum examini ſubjiciam, mihi enim, prae Obſervationum inopia, exemplo aliquo idoneo ipſam confirmare non datur.

Habeantur *quinque* Planetae Obſervationes exquiſitiſſimae, dum *Telluris* centrum in eodem Orbitae ſuae puncto verſaretur, factae; haec Planetae Loca, Parallaxibus aliiſque inaequalitatibus, quantum fieri poteſt, exuta, projiciantur in Planum aliquod quod maxime commodum videbitur, ſive illud Plano *Eclipticae* rectum fuerit, aut, ſi mavis, in Angulo quovis dato inclinatum. Sint *Locorum* Projectiones Puncta a, b, c, d, e (*Fig.* 15.) Sectio Conica quae per illa deſcribitur, V Q T P, atque in ea Punctum s Projectio Centri *Solis*. Sectionis Diameter per s ſit V T, huic conjugata P Q, Z Centrum *Terrae* inter obſervandum, Z I perpendiculum exinde dimiſſum quod Plano aſſumto occurrat in I, I R ad

P Q

P Q normalis, quae diametro per s occurrat in H. Tum vero junctis Z, H, ductâque H N ipsi P Q Parallelâ, Projectio Curvae V a b Q c T d e P s in Planum per Centrum Solis Plano Z H N Parallelum erit (v A B q C t D E p S) *Ellipsis* quae, Sole S in ipsius Axe constituto, Curvam *observatam* praestare poterat.

* Aliam, huic quasi *Conjugatam*, sic invenies. " *Per* s *punctum duca-" tur Recta Projectioni occurrens in* " M, m, *eâ positione ut si Contingentes* " *in* M, m, *se mutuo secent in* h, *juncta* " I h *sit subtensae* M s m *normalis*; *Et* " *pro Lineâ Extremorum accipiatur* " *quae per* h *ducitur Subtensae pa-" rallela.*" Utra vero Ellipsis sit Orbita quaesita facile dignosces.

Rectae Z S *Solis* et *Terrae* centra jungentis quantitas, ad datum tempus, pro cognitâ habetur; ad cujus mensuram revocetur Orbitae Planetariae Magnitudo. At si, per *Theoriam* usu jam receptam, de Loci Z identi-

* *Supple quod deest in Figurâ.*

tate certo satis constare detur, ipsa Orbitae Terrestris *Excentricitas* hinc deprehendi et ad libitum corrigi poterit; ex ratione scilicet quam habet Axis Ellipseos Planetariae ad rectam Z S in diversis Anni tempestatibus.

Exempl. V.

Solidi Rotundi, Curvae cujusvis circa Axem rotatione geniti, Imaginem describere. Tab. VI. Fig. Z.

Liquet ejusmodi Solidi Superficiem tractari posse tanquam ex innumeris Circulis conflatam, quorum Diametri sunt Curvae *Genitricis* Ordinatae rectangulae. Axe itaque in Partes satis minutas distributo, Circuli correspondentes projecti, Solidi Superficiem totam exhibebunt. Restat modò ut resecetur Pars illa quae Partium contiguarum interpositu occultatur; quod quidem sic ferè praestari poterit.

Posito quod sit A T t v Circulus revolutione Ordinatae A T Axi A P in Puncto

Puncto A insistentis genitus; O Oculus, seu Polus Projectionis; P Punctum in quo T P contingens Curvae Genetricis ad Ordinatam A T pertinens Axem secat: Jungatur P O, quae, (si opus producta) Plano Circuli T t v occurrat in Q. Et exinde ductis Q T, Q t, quae Circulum tangant in T, t, erit Arcus T t visibilis, reliquus T v t post Solidum latebit. Plana etenim P O Q T, P O Q t, contingent tum Curvam Genitricem tum Circulum in T, t, adeoque et Superficiei particulas ibidem genitas.

Diversi oriuntur Problematis Casus, pro diversâ Puncti O positione: quod si cum ipso P coincidat, fiet Circulus T t v utrinque visibilis. Si ad alteras Partes, ut in o, rectâ processerit, erit Arcus T v t jam conspicuus, ipse autem T t occultabitur. Ponatur Oculus in ω, ut sit ω P Diametro alicui Circuli T t v Parallela, eritque Arcus T t Semicirculus; et positâ insuper ω P infinitâ; evadent omnes

T t Semicirculi, et Projectio Figurae Genetrici similis et aequalis. Fieri etiam potest ut Punctum Q non cadat extra Circulum T t v, unde erit Punctorum T, t, determinatio impossibilis. Id est Circuli peripheria vel tota conspicietur vel tota occultabitur.

Occurrit et alia partium Interpositio *non-contiguarum*, quoties Figura Genetrix varié ad Axem inflectitur, vel curvaturas forte habet discontinuas. Ut in Columnarum Basibus *Torum* videmus non tantùm sui ipsius sed et reliquae Baseos partem aliquam obumbrare. Atqui hujusmodi Casus speciatim tractari non postulant. Inventis enim ubique, ut supra praescribitur, punctis pluribus T, t, iisdemque in Planum datum projectis, Curvae per Projectiones istas descriptae partes visibiles disterminabunt.

Atque haec de Solidorum Projectione dicta sunto: Neque enim Doctrinam illam de *Curvis dupliciter curvatis*,

curvatis, parum certé proficuam, hic in Subsidium vocabimus ; quum, ex defectu descriptionis Organicae, res ad punctorum inventionen tandem reditura esset. De solidis autem minus regularibus, vix quidquam utilius tradi potest: ejusmodi saltem figurae quae apud Sculptores, Architectos, aliosque in pretio sunt et praecipué laudantur, mathematicas rationes prope fastidiunt ; certos modo limites extra quos evagari vix liceat rité signaverit Geometra, cetera Artificum ingenio et solertiae prudens relinquet.

SCHOLIUM.

Projectionem Methodus Problematis resolvendis non apta magis invenietur quam Theorematum ac Demonstrationum ferax. Hinc enim Curvae alicujus Proprietates notae, ad Curvae cognatae proprietates ita facile transferuntur, ut ea demonstrandi Ratio, rité adhibita, maximé genu-

ina censeri posset; quae scilicet menti, tanquam invitae, assensum non extorqueat, sed, ipsam rei naturam explicando, alliciat. Nec dubitandum quin, Doctrinâ hâc ulterius promotâ, plures Figuram Affectiones adhuc latentes detegi queant, ipsaque Geometria Elementaris incrementum acceptura sit haud contemnendum.

Sic angurari liceat vel ex iis quae, de Sectionibus Coni, inventis *Hospitalianis* obiter adjecit Celeberrimus D. *Mac-Laurin. Fluxion. Art.* 609, et seq. Mihi etiam, haec versanti, plura sese offerebant; quorum, quia singula persequi non vacat, Spicilegium quoddam, in *Figuram* 16. congestum, exhibetur.

1. Si e Circuli dati Centro K, in rectam positione datam P Q, demittatur normalis K G, et a rectae P Q Puncto quovis P Circulum contingant rectae P A, P B, *juncta* A B *ipsam* K G *secabit in dato puncto* C.

Ductis

Ductis enim P K, K B, quarum illa subtensae A B occurrat in F, erit Semidiametri datae quadratum K B q Rectangulo P K F aequale; cui etiam, propter Triangula K P G, K C F, similia, aequatur Rectangulum G K C; datur autem (*Hyp.*) et K G, adeoque K C et Punctum C. Haec a D. *Mac-Laurin, ubi supra*, demonstrantur.

2. Junctâ P C quae Circulo occurrat in D, E, productâque subtensâ A B ut rectam P Q secet in Q; *ad idem Punctum convergent* D Q, E Q, *Circulum contingentes in* D, E.

3. Ductâ K Q, *est Angulus* K Q C *Angulo* K P C *aequalis.*

4. *Inscriptae* A D B E *Latera opposita* A D, B E, vel A E, D B, *producta, ad Punctum* R, vel r, *in datâ* P Q *sito, convergent.*

5. Contingentes sic ductae Quadrilaterum constituant H I L M; et

erunt Puncta H, C, L, R, in *eâdem rectâ*, *ut et Puncta* M, C, I, r.

6. *Rectangula sub Lateribus oppositis Trapezii inscripti sibi mutuo aequantur* : A D × E B = A E × D B. (Adeoque Rectangulum A B × D E est utriusvis duplum.) Nam est A D : A E : : D P : (P A =) P B : : D B : B E.

7. Propter Triangula P G C, K G Q Similia *est Rectangulum* P G Q *dato Rectangulo* K G C *aequale*, vel etiam rectae G n Circulum a Puncto G contingentis Quadrato.

8. Productâ utrinque C n ut Circulo rursus occurrat in m, Lateribus Figurae circumscriptae in a, b, d, e; inscriptae autem in α, β, δ, ε, Punctis: *Erit* C a = C b, C d = C e; C α = C β, C δ = C ε; A a = B b, E e = D d.

9. Quoniam est C n tam inter K C, C G quam inter A C, C B media Proportionalis, *sunt Puncta* A, K,

B, G

B, G *ad Peripheriam Circuli*, ut et Puncta E, K, D, G.

10. *Rectae* P Q *Quadratum aequale est quadratis e contingentibus* P B, Q D, *simul sumptis*.

11. A Puncto G ad contactum aliquem, ut B ductâ G B *erunt Triangula* P G B, P B Q *Similia*, adeoque *Ratio ipsius* P G *ad* P Q *Rationis* P B *ad* P Q *duplicata*.

12. Secet ductarum aliqua, ut G D rectam C m in t, *eruntque* C t, C m, C d *continue Proportionales*, &c.

SECTIO

SECTIO IV.

*Genesis Linearum tertii Ordinis ex Umbris quinque Parabolarum divergentium**.

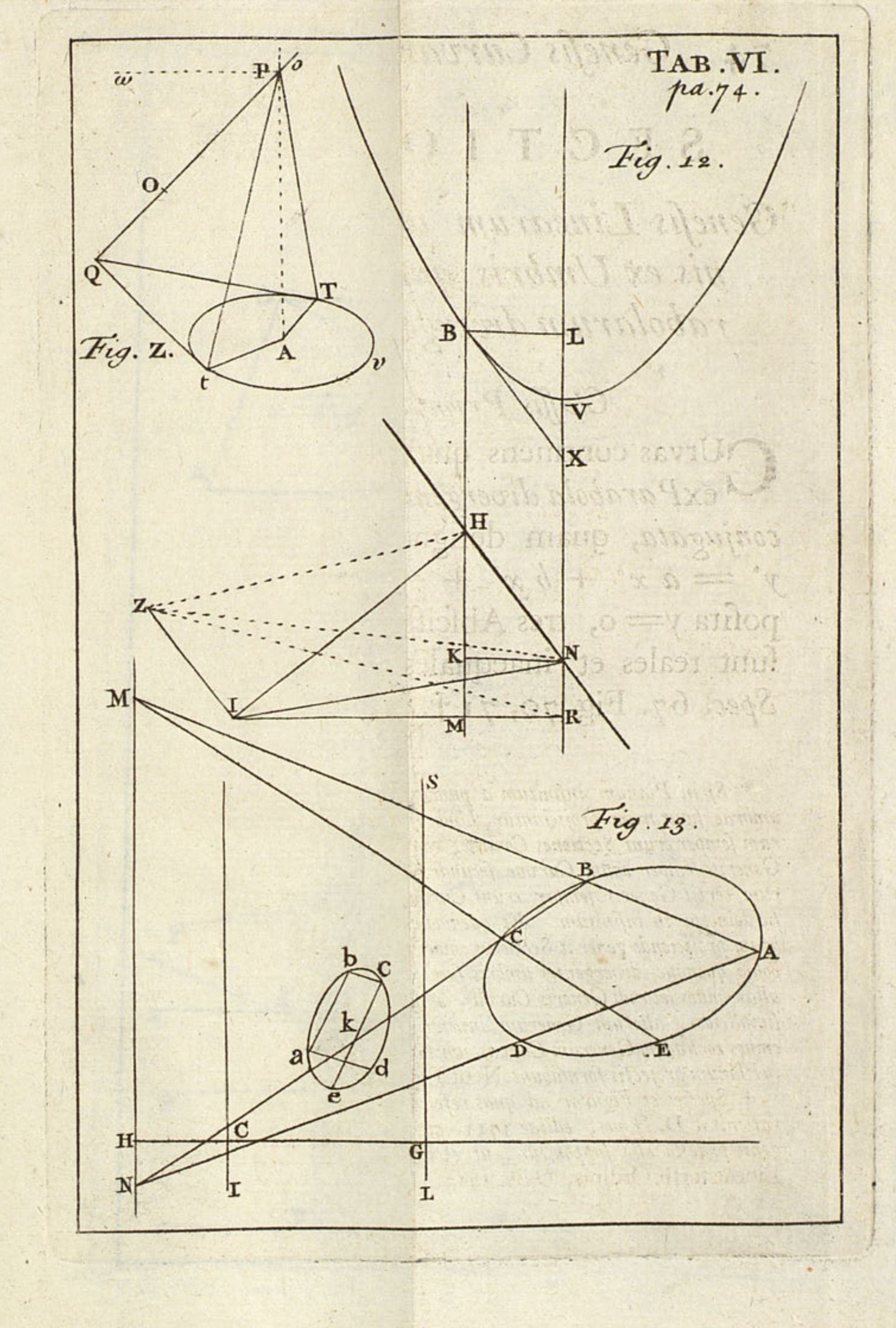
Classis Prima.

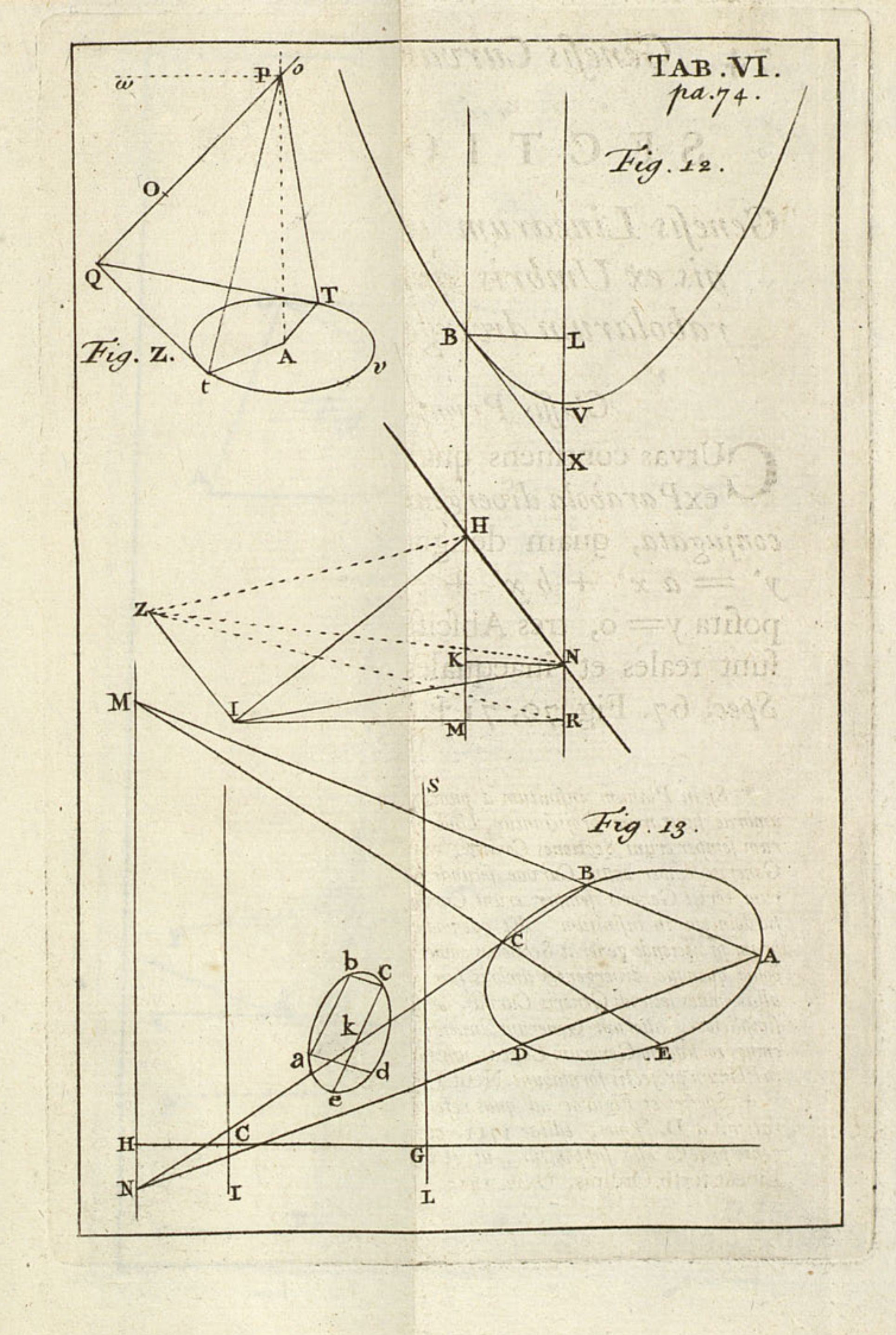
CUrvas continens quae generantur ex *Parabola divergente* cum *Ovali conjugata*, quam designat Aequatio $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ubi posita $y = o$, tres Abscissae x valores sunt reales et inaequales. *Neutono Spec.* 67. Fig. 70, 71 †.

Pars

* *Si in Planum infinitum a puncto lucido illuminatum umbrae figurarum projiciantur, Umbrae Sectionum Conicarum semper erunt Sectiones Conicae, eae Curvarum secundi Generis semper erunt Curvae secundi Generis, eae Curvarum tertii Generis semper erunt Curvae tertii Generis, et sic deinceps in infinitum. Et quemadmodum Circulus umbram projiciendo generat Sectiones omnes Conicas, sic Parabolae quinque divergentes umbris suis generant et exhibent alias omnes secundi Generis Curvas, et sic Curvae quaedam simpliciores aliorum Generum inveniri possunt quae alias omnes eorundem Generum Curvas umbris suis a puncto lucido in Planum projectis formabunt.* Neut. Enumerat. sub finem.

† *Species et Figurae ad quas refertur eae sunt Enumerationis a D. Jones, editae* 1711. *qui Tractatus haec legenti praesto esse supponitur; ut et V. Cl.* Jac. Sterling Lineae tertii Ordinis, *Oxon.* 1717.


TAB. VI.
pa. 74.
Fig. Z.
Fig. 12.
Fig. 13.
P
o
w
O
Q
T
A
t
v
B
L
V
X
H
Z
K
N
I
M
R
S
B
C
A
D
E
b
c
k
a
d
e
H
C
G
N
I
L


TAB. VI.
pa. 74.
Fig. 12.
Fig. Z.
Fig. 13.
w
P
o
O
Q
T
A
t
v
B
L
V
X
H
Z
K
N
I
M
R
M
S
B
C
A
b
c
k
a
d
e
D
E
H
C
G
N
I
L

Pars I. *Fig.* A A.

Ubi *Linea Extremorum*, in qua Planum per Punctum immobile ductum, Plano Projectionis parallelum, Figurae expositae Planum secat, *est Axi Figurae normalis*, aut saltem *Ordinatis* (y) *Parallela. Hanc vero Lineam*, *Litera* (L) *brevitatis causâ*, *posthac notabit.*

I.

Secet L Axem in A, extra Curvam. Et Parabola projicietur in *Hyperbolam Conchoidalem*, cui *Assymptotos* est ipsa Linea Horizontalis, in quam utique projicitur Ordinata infinite distans. Ovalis autem abit in *Ovalem* ad Verticem Conchoidalis sitam. Quae est *Species* 39. *Fig.* 45.

II.

Tangat Ovalem in B; et *Ovali* in *Parabolam* conversâ, orietur *Species* 55. *Fig.* 59.

III.

Secet Axem in C, Ovalem in Punctis T T; et ductis ad T, T tangentibus quae concurrant ad Partes A, harum Projectiones erunt binae Asymptoti ad *Hyperbolas* ex Ovali oriundas. Asymptotôn vero Concursus supra Lineam Horizontalem, Asymptoton tertiam, cadet. Unde fiet *Species* 21. *Fig.* 27.

IV.

Secet Axem in D, ut quae Ovalem in T, T contingunt evadant Parallelae; ipsae in binas Asymptotos etiamnum projicientur, sed quarum concursus incidit in tertiam Asymptoton; *Speciem* efficiens 31. *Fig.* 37.

V.

Sit Intersectio in E Puncto, ut Tangentes concurrant ad alteras partes, et, in Projectione, Triangulum ab Asymptotis formatum cadet infra

Asymp-

Asymptoton *Conchoidalis*. Quae est *Species* 20. *Fig*. 26.

VI.

Tangat L Ovalem in F; ea in *Parabolam* convertetur, cujus Vertex supra Conchoidalis Asymptoton posita *Speciem* exhibet 56. *Fig*. 60.

VII.

Secet Axem in G inter Parabolam et Ovalem; eritque Projectio *Species* 40. *Fig*. 45.

VIII.

Tangat Parabolam in H; et nascetur Curva *Hyperbolo-Parabolica* qualis in *Fig*. 57 conspicitur, cum *Ovali* supra Asymptoton positâ.

Hanc Speciem D. *Neutonus* non recenset. Ipsius vero Aequatio est $xy^2 = bx^2 + cx + d$, eadem sc. ac *Speciei* 55. modo Aequationis $bx^2 + cx + d = 0$, radices ponantur negativae,

gativae, vel sit Coefficiens c Affirmativa.

IX.

Secet Parabolam recta L in Punctis S, S, ubi versus Axem concava est, et ductis contingentibus Curvam S O, S O, hae inter Parabolam et Ovalem concurrent ut in O, et Ovalem in Angulo quem ibi formant complectentur; ad alteras autem partes productae Crura Parabolica secabunt. Unde erit Projectio *tres Hyperbolae* cum *Ovali* intra Triangulum Asymptoton comprehensâ. Hyperbola in quam projicitur Arcus rectae L et Vertici interpositus est *inscripta*, at aliae duae quae e cruribus infinitis generantur sunt *Ambigenae*. Haec est D° *Stirling Species* 11. a *Neutono* omissa.

X.

Sin Puncta Intersectionis S, S, fuerint ubi Curva versus Axem convexa

est,

est, Tangentes retro productae ipsi occurrent ad Partes Verticis; unde Hyperbola una erit *Circumscripta*, reliquae duae inscriptae. Quae est *Species* 10. *Fig.* 17.

XI.

Si denique recta L Curvam secet in Punctis contrarii Flexus P, P, Tangentes ad ea Puncta Curvam ibidem secant, et tres Hyperbolae sunt *inscriptae*. Quae *Neutono* omissa, D^{o}. *Stirling* est Species 24.

SCHOLIUM.

Quâ Ratione Curvae sic genitae Aequationibus *Neutonianis* designentur facile constat. Nam tres Vertices Figurae *Genetricis* (B, F, H,) ubi Ordinatae Valor fit nihilo aequalis, totidem dant ejusdem conditionis in *Genitâ*. Et assumtâ pro Ordinatâ primâ Linea Horizontali, rectae L positio Verticum illorum plagas indicabit, id est Signa Valorum Abscissae

ubi

ubi Ordinata = o. Sic (*N.* VII.) quoniam Punctorum B, F, Projectiones supra Lineam Horizontalem, Puncti H Projectio infra eandem cadit, in Aequatione $xy^2 = -ax^3 + bx^2 + cx + d$ quae Curvam designat, Ordinatâ evanescente, duo Abscissae x Valores erunt ejusdem Signi, tertius Signi contrarii.

At Curvam genitam hac Aequatione designari patet. Nam quia Diametrum habet, deest Terminus ey; et quia, ultra Vertices in quas projiciuntur F, H, Ordinata evadit imaginaria, oportet ut Terminus altissimus ax^3 Signo negativo afficiatur.

Quod si Vertex aliquis, rectâ L per ipsum transeunte, projiciatur in infinitum, Aequatio *Neutoniana* uno gradu deprimenda est; ut pro $xy^2 = ax^3$ &c. v. gr. fiat $xy^2 = * bx^2 + cx + d$. Quae eadem Curvis posthâc recensendis, Diametrum habentibus, applicentur.

Notan-

Notandum denique Puncta *Contrarii Flexûs* figurae Genitricis, manere in *Genitâ*, nisi per ea transeat L, ut in *N.* XI. Facile quoque ex ipsa Projectione discerni ad quam Projectionis Partem pertineant. Sic utrumque in Hyperbolâ circumscripta (*N.*X.) in *Ambigenis* (*N.* IX.) singulis unum reperias.

Pars Altera.

Ubi recta L non est Ordinatis (y) Parallela. Fig. B B.

XII.

Secet L *Parabolam* in Puncto quovis T, ad has vel illas contrarii flexûs Partes, neque *Ovalem* attingat; tangens T Q ad illud Punctum fiet *Asymptotos* Figurae genitae. Crurum extrema in Projectione *flexu* contrario jungentur ad Lineam *Horizontalem*; Ovalis *Ovalem* dabit: Eritque Figura Hyperbola *Anguinea* cum *Ovali*, *Species* 33. *Fig.* 39.

XIII.

Manente Puncto T, cum tangente T Q, circa illud rotari intelligatur recta L, donec Ovalem contingat in N aut K; manebit Hyperbola *Anguinea*, Ovali in *Parabolam* conversâ; *Species* sc. 52. *Fig.* 56.

XIV.

Eousque rotetur Recta L, ut Ovalem secet in Punctis R, R, ad quae rectae Ovalem contingentes triangulum efficiant S Q M cum tangente T Q, vel sint forsan Parallelae: Et in utrovis Casu erit Projectio binae *Hyperbolae inscriptae* Asymptotis quae fiunt è Tangentibus Ovalem, et tertia *Anguinea*. Quae est *Species* 9. *Fig.* 15, 16.

XV.

Ea sit rectae L Positio ut Tangentes ad R, R, concurrant ad tertiam T Q, et in Figurâ genita, Asympto-

toti

toti per idem Punctum transibunt. Quae est *Species* 26. *Fig.* 32.

XVI.

Secet L Parabolam in T, atque eandem contingat in X; (vel X 2.) Projectio erit duae Figurae *Hyperbolo-Parabolicae*, quarum alteram Asymptotos secat, cum *Ovali* conjugatâ. *Species* 46. *Fig.* 50.

XVII.

Secet L Parabolam in Punctis T, B, C; Tangentes ad ea Puncta, (T Q, F G, H I) quae neque ad idem Punctum convergere, neque omnes sibi invicem Parallelae esse possunt, totidem Asymptotos dabunt, triangulum intra quod *Ovalis* projicitur constituentes: quia sc. Ovalis Genitrix in Angulo externo H L G semper invenietur *. Parabola vero tres Hyperbolas dabit. Quarum quae è Cruribus infinitis nascitur, erit *Cir-*

* Conferatur *Exempl.* 2. *Schol.* 1. *Sect.* II.

cumscripta, quia Tangentes ad extrema Puncta (T, C,) utraeque Cruribus (projectis saltem) occurrent: Tangens vero ad B alteri e Partibus intermediis T B aut B C occurrit (modo B non sit ad contrarium Flexum, de quo postea) unde ea Pars Hyperbolam dabit *Ambigenam*; at tertia, quam rectarum contingentium nulla secat, *Inscriptam*. Estque haec Species 1. *Fig.* 1, 2.

XVIII.

Et si recta L cum Axe coincidat, tres Tangentes parallelae, in Projectione transibunt per Punctum illud in Lineâ Horizontali in quo Crurum extrema conjunguntur. *Species* 27. *Fig.* 33.

SCHOLIUM.

Aequatio *Neutoniana* (qualis est $ax^4 + bx^3 + \&c = 0$) portiones Abscissae, inter Asymptoton aliquam quae pro ordinatâ primâ assumitur, et rec-

tas huic Parallelas quae Curvam tangunt, aut per Punctum duplex transseunt, interceptas, designant. Si itaque ad quam Aequationem pertineat Projectio aliqua, ea v. gr. *N.* XIV. dignoscere velis, a Puncto T in quo L Curvam secat, ductis Curvam contingentibus, quot duci possunt, (T X, T X 2, T K, T N,) harum Projectiones, sibi invicem et Asymptoto ex T Q oriundae, Parallelae, Figuram genitam contingent; Aequationis vero dimensionem, et Radicum Signa, contingentium Numerus et Positio respectu assumptae T Q, indicabunt. Sic in praesenti Exemplo, Numerus contingentium quaternarius Aequationem indicat $a x^4 + b x^3 + \&c = 0$, cujus radices sunt reales et inaequales. Et quia Contingentes T K, T X infra T Q, ac T X 2, T N supra eandem projiciuntur, id duas Radices duabus contraria Signa habere denotat.

Assumta autem pro Ordinatâ primâ Asymptoto ex *Ovalem* contingente (ut S M) genitâ, quoniam a Puncto contactus R unica S M Curvam contingere potest Aequationis $a x^4 + b x^3 + \&c = 0$ Radices erunt omnes imaginariae. Qui Casus in Fig. 15. exhibetur.

Classis Secunda.

Curvas continens quae fiunt projiciendo Parabolam PUNCTATAM ; OVALI *conjugata in* PUNCTUM *conversâ, per aequalitatem duarum Radicum Aequationis* $a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$. *Neutono Speci.* 69. Fig. 74.

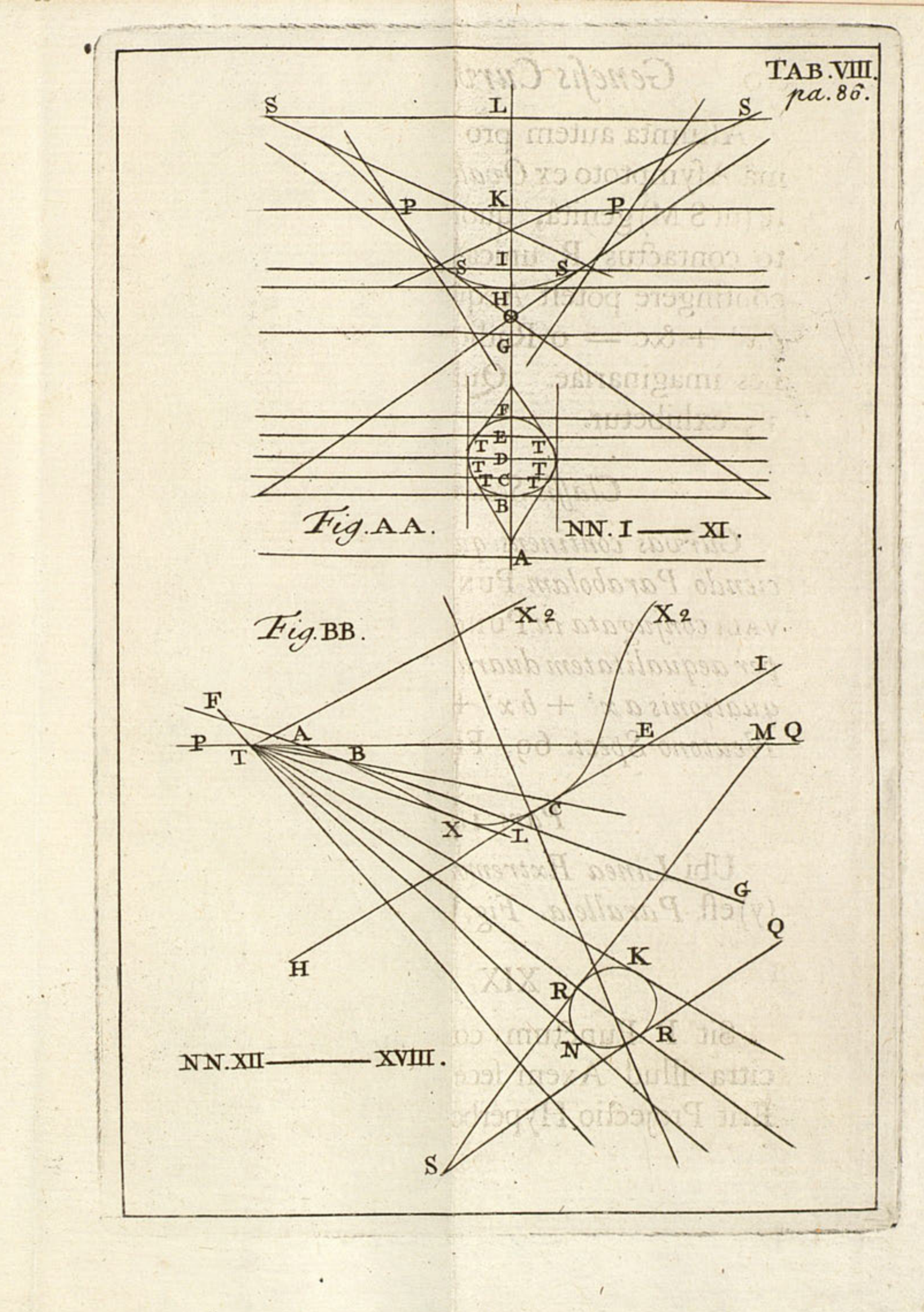
Pars 1.

Ubi *Linea Extremorum Ordinatis* (y) est *Parallela. Fig.* C C.

XIX.

Sit P Punctum conjugatum; et citra illud Axem secet L ut in A: Erit Projectio Hyperbola *Conchoidalis*

cum


TAB. VIII.
pa. 86.
Fig. A A.
NN. I —— XI.
Fig. BB.
NN. XII ——— XVIII.
S L S
P K P
S I S
H
G
F
E
T D T
T C T
B
A
X 2
X 2
I
F
P T A B E M Q
C
X L
G
Q
H
K
R
R
N
S

cum *Puncto conjugato* ad Convexitatem ſito. *Species* 43. *Fig.* 49.

XX.

Sin Axem ſecet in B, inter Punctum et Verticem, erit *Speciei* 44. *Puncto conjugato ſupra Aſymptoton Conchoidalis* projecto.

XXI.

Si per ipſum P tranſeat, *Conchoidalis* genita erit *Pura. Puncto* ſcilicet in infinitum projecto, adeoque pereuntibus binis Aequationis *Neutonianae* dimenſionibus, fiet *Species* 63. *Fig.* 67.

XXII.

Punctatam tangat L in C, erit Projectio duae Figurae *Hyperbolo-Parabolicae* cum *Puncto conjugato* ſupra Aſymptoton ſito.

Speciem hanc N° VIII. Analogam apud *Neutonum* deſiderari animadverterat D. *Nic. Bernoulli*; quod me

olim monuit D. *Cramer*, *Phil.* et *Math.* apud *Genevenses* celebris Professor.

XXIII, XXIV, XXV.

Secet L Parabolam punctatam; et *Species* N N. IX, X, XI, descriptae in totidem *Analogas* transibunt, substituto pro Ovali *Puncto* conjugato.

Harum una XXIV a *Neutono* recensetur; *Speciem* constituens 13. *Fig.* 20. N. XXIII. D° *Stirling* est *Sp.* 15. N. XXV. *Sp.* 25.

Pars Altera.

Ubi Linea Extremorum Ordinatis non est Parallela. Fig. D D.

XXVI.

Sit P *Punctum conjugatum*, T Punctum aliquod in Crure *Parabolae* assumptum circa quod rotari intelligatur L; et primo situm obtineat T A vel T B ad has vel illas *Puncti* Partes, eritque Projectio *Hyperbola anguinea*

anguinea cum *Puncto conjugato*, *Species* 36. *Fig.* 42.

XXVII.

Transſeat L per Punctum conjugatum; hoc in infinitum projecto, adeoque deficientibus binis Aequationis ad Abſciſſas dimenſionibus, Hyperbolae inſcriptae *Fig.* 15, 16. jam evanuerint; Specieſque ibi deſcripta converſa erit in *Speciem* 61. *Fig.* 65.

XXVIII.

Si *Parabolam* contingat Linea Extremorum, per T ducta, in S, Curva genita erit duae *Hyperbolo-Parabolae* cum *Puncto conjugato*, *Species* 49. *Fig.* 53.

XXIX.

Secet L *Punctatam* in T, M, N. Tangentes ad ea Puncta, projectae totidem dabunt *Aſymptotos* intra quas invenietur *Punctum*, ſeu *Ovalis*

infinite

infinite parva, *Parabola* autem tres *Hyperbolas* generabit, *Inscriptam*, *Circumscriptam* et *Ambigenam*. Quae est *Species* 4. *Fig*. 7.

XXX.

Si pro Linea Extremorum ipse Axis *Punctatae* assumptus fuerit, Curva *N*.XXVI. descripta in Anguineam *Puram* cum *Centro* transibit. *Speciem* efficiens 62. *Fig*. 66.

Classis Tertia.

Curvas continens quas generat PARABOLA PURA *Spec*. 71. *Fig*. 73, 74.

Haec plures suppeditat Casus; na si Aequationis $ax^3 + bx^2 + cx$ m $d = 0$ Radices duae sint impossibiles, fieri potest ut *Parabola* formam indicat *Ampullatam*, qualis in *Fig*. E E conspicitur: Cujus quidem Symptomatis Determinatio hic praemittenda.

 Posita

Posita $a = 1$, finge Aequationem $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, é duabus $x^2 + h^2 = 0$, $x + k = 0$, in se ductis, conflatam, ut sit $y^2 = x^3 + kx^2 + h^2x + kh^2$, Aequatio ad Curvam; fiat etiam Fluxio Ordinatae y nihilo aequalis, et proveniet $x = -\frac{1}{3}k \pm \sqrt{\frac{1}{9}k^2 - \frac{1}{3}h^2}$, Abscissa ad Curvae Elementum pertinens quod est Axi Parallelum. Quoties igitur est $\sqrt{\frac{1}{9}k^2 - \frac{1}{3}h^2}$ quantitas realis, Parabola erit *Ampullata*; Si $\frac{1}{9}k^2 = \frac{1}{3}h^2$, erit inter *Campaniformam* et *Ampullatam* media.

Si Aequationis $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ radix realis (k) ponatur affirmativa, habebitur $x = +\frac{1}{3}k \pm \sqrt{\frac{1}{9}k^2 - \frac{1}{3}h^2}$; cujus quidem forma nihil impedit quo minus Figura sit pariter *Ampullata*. Obstat autem limitatio hinc orta, quod sit, ex *Hypothesi*, Abscissa k *minima* quae Ordinatam agnoscat realem, sitque Valor modo inventus ipsâ k necessario

minor.

minor. His praelibatis, Projectiones Parabolae *Purae* sic enumerantur.

Pars 1.

Ubi Linea Extremorum est Ordinatis (y) *parallela.* *Fig.* E E.

XXXI.

Secet L Axem *Purae* extra Curvam ut in Q, et Projectio erit Hyperbola *Conchoidalis* Pura: manent nimirum radices duae impossibiles Figurae Genetricis in Genitâ, ut fiat *Species* 45. *Fig.* 48, 49.

SCHOLIUM.

Projectio *ampullata* nonnunquam evadet, licet Figura exposita sit tantum *Campaniformis*; quando sc. binae tangentes duci possunt quae concurrunt ad alteras Partes rectae L respectu verticis. Nam Tangentes illae, et Arcus contactibus vicini, in Projectione versus *Asymptoton* convergent, ut in *Fig.* 48.

XXXII.

XXXII.

Tangat L Parabolam in Vertice V, et ſit *Species* 53. *Fig.* 57.

XXXIII.

Secet L Curvam in A, A, ut Tangentes concurrant ad Partes Verticis, at productae ſecent Crura infinita; atque *Hyperbolae* duae erunt *Ambigenae*, una *Inſcripta*. *Aſymptotôn* vero concurſus cadet ſupra tertiam, quae eſt Projectio Ordinatae infinite diſtantis. *Species* 15. *Fig.* 21.

XXXIV.

Secet in F, F, ut Tangentes ſibi mutuo occurrant ad Partes vertices, ut prius, Curvamque ſecent ad eaſdem Partes; eruntque duae *Hyperbolae inſcriptae*, tertia, ſupra Horizontalem projecta, *Circumſcripta*. Quae eſt *Species* 14. *Fig.* 20.

XXXV.

XXXV.

Transeat L per C, C, ut Tangentes concurrant ad Partes Crurum et ad easdem Curvam secent; eritque Projectio duae *Hyperbolae Ambigenae*, una *Inscripta*, ad Latera Trianguli Asymptotôn positae. *Species* 17. *Fig.* 23.

XXXVI.

Sin ad Partes verticis Curvam secent (L transeunte per D, D) una erit *Circumscripta*, reliquae *Inscriptae*. *Species* 16. *Fig.* 22.

XXXVII. XXXVIII.

Sint Tangentes Parallelae, idque vel ad B, vel ad E; ipsae projectae ad Lineam Horizontalem (tertiam *Asymptoton*) concurrent: Unde prior Casus *Speciem* dabit 29. *Fig.* 35. Alter *Speciem* 28. *Fig.* 34.

XXXIX.

XXXIX, XL, XLI.

Tranſeat L per Puncta *Contrarii Flexûs*, eruntque Hyperbolae omnes *Inſcriptae:* Tangentes autem in Parabolâ *Campaniformi* coibunt ad Partes verticis, in *Ampullatâ* ad Partes Crurum, vel in eâ quae inter utramque *Media* eſt erunt ſibi invicem palelae; qui Caſus totidem Species dabunt 1^us^ *Speciem* 22. *Fig.* 28. 2^us^ *Speciem* 23. *Fig.* 29. 3^us^ *Speciem* 32. *Fig.* 38.

Pars Altera.

Ubi Linea Extremorum non eſt Ordinatis (y) *Parallela. Fig.* D D, F F.

XLII.

Parabolae *Purae* ſemel occurrat Linea Extremorum T A, ut in T Puncto, ea in *Anguineam Puram* ſine Centro et Diametro projicietur; *Speciem* ſc. 37. *Fig.* 42.

XLIII.

XLIII.

Tangat Linea Extremorum T S Curvam in S (*Fig.* D D) et projicientur duae *Hyperbolo-Parabolae Purae*. *Species* 50. *Fig.* 53, 54.

XLIV.

Secet Parabolam in Punctis T, M, N in quibus Curvam tangant rectae T π, N π, M Q, Triangulum constituentes π R Q, cujus vertex R ad has Partes rectae L locetur, et tres *Hyperbolae* sic Projectae *Speciem* constituunt 5. *Fig.* 7, 8*.

XLV.

In eâdem (*Fig.* F F) finge rectam L circa M rotari, donec pervenerit in situm t M n, ut sit Trianguli a Tangentibus comprehensi vertex r inter rectam L et Tangentem t p q positus; quo Casu *Hyperbolae* ad Latera Trianguli

* Conferatur N. XVII.

anguli *Aſymptotôn* conſtituentur, *Speciem* 6. exhibentes. *Fig.* 9, 10.

XLVI.

Ea ſit rectae n M t Poſitio: ut evaneſcat Triangulum p q r; et Aſymptotis per idem Punctum tranſeuntibus, orietur *Species* 24. *Fig.* 30.

XLVII.

Accepto denique pro *Lineâ Extremorum* ipſo *Parabolae* Axe, erit Projectio *Anguinea pura* cum *Centro*, *Species* 38. *Fig.* 43.

Scholium I.

Projectionum Caſus illos, ubi *Linea Extremorum* per alterutrum *contrarium Flexum* ducitur, hactenus omiſſi ſunt, ut univerſos unius Theorematis ope, atque eâdem operâ abſolverem.

THEOREMA I.

In Parabola Divergente *cum* Ovali *conjugatâ* (Fig. G G) *si, a Puncto Contrarii Flexûs* P, *ducantur rectae* P A, P B, P C, *Curvam contingentes in* A, B, C; *erunt tria Contactûs Puncta ad eandem rectam.*

DEMONSTRATIO.

Sit enim Z V Axis Curvae, ipsi occurrens ad Vertices V, v, u, in quibus eandem contingant V Q, v R, u S, sibi invicem parallelae; et assumtâ pro *Lineâ Extremorum* rectâ L M *Parabolam* contingente in P, si Curva, ritu praecedentium, in Planum projici concipiatur, erit projectio etiamnum *Parabola divergens* cum *Ovali*, *Genita* sc. ejusdem Speciei cum *Genitrice*. Et quum, in Projectione istâ, *Parabolae* Crura infinita ad Punctum in Lineâ *Horizontali* coeuntes, *contrarium Flexum* ibidem efficiant, at Contingentes V Q, v R, u S,

TAB. IX.
pa. 98.

Fig. DD.

NN. XXVI —— XXX.

Fig. CC.

NN. XIX — XXV.

Fig. EE.

NN. XXXI —— XLI.

Fig. FF.

NN. XLII —— XLVII.

u S, ad idem illud Punctum convergant, liquet Propositum. Erant enim Puncta Contactûs V, v, u, ad eandem Rectam in Figurâ *Genitrice*; et vicissim, Puncta A, B, C, in Vertices Figurae *Genitae* projecta, in eâdem rectâ, eâ sc. quae in Axem *Genitae* projicitur, extitisse necesse est. *Q. E. D.*

COROLL. 1.

In *Punctatâ* et *Purâ*, Tangens PC projicitur in Rectam quae *Parabolam Genitam* in Vertice contingat, sitque ejusdem Ordinatis Parallela.

COROLL. 2.

Constat etiam non modo in *Parabolis* hisce, sed in Curvis omnibus exinde derivatis, idem obtinere. Curvasque omnes ex unâ qualibet ejusdem *Classis* generari.

Hinc Projectiones modo memoratas recensere et ad *Species* notas re-

ferre facile fuerit, etsi novi quiddam primâ facie minitentur. Cum enim Contingentes a Puncto in quo Linea Extremorum Curvam secat exeuntes, Figurae *Genitae* vertices determinent * ; sint autem, in Casu proposito, vertices in eâdem rectâ constituti ; palam est Figuram *Genitam* fore aliquam è Curvis prius descriptis, *Diametro* destitutis, in *Analogam*, quae *Diametrum* habeat, conversam. Singulae autem ejusmodi Conversiones sunt quae sequuntur.

1.	N. XII	*transit in*	N. I *vel* VII.
2.	XIII	- - -	II *vel* VI.
3.	XIV	- - -	III *vel* V.
4.	XV	- - -	IV.
5.	XVI	- - -	VIII.
6.	XVII	- - -	X.
7.	XXVI	- -	XIX, XX.
8.	XXVII	- -	XXI.
9.	XXVIII	- -	XXII.
10.	XXIX	- -	XXIV.

11.

* *Vid. pag.* 79, 80.

11\. N. XLII *in* XXXI.
12\. XLIII XXXII.
13\. XLIV XXXIII, XXXIV.
14\. XLV XXXV, XXXVI.
15\. XLVI XXXVII, XXXVIII.
16\. 17. 18. } Et ſi fuerit L quae Curvam contingit ad *Contrarium Flexum*, renaſcitur *Species Genitrix*.

SCHOLIUM 2.

D. *Mac Laurin*, qui haec inſpicere dignatus erat, *Theorema* egregium de *Lineis tertii Ordinis* communicavit, *Literis* 18 *Feb.* 1717-8, ad me datis; quod et nunc eximio Operi de *Fluxionibus* inſertum video *.

" *Lemma*, inquit, de Punctis con-
" trarii Flexûs, in primis notatu dig-
" num. Illud quidem mihi non
" prius obſervatum ex Affectione ta-
" men harum Curvarum generali
" ſtatim deduxi, a *Neutono* aliove
" quopiam non memoratâ, at quam
" in pluribus hujuſmodi inveſtiga-

 " tionibus

* *Art.* 401.

" tionibus utilem inveneram. Hujus
" te nunc participem faciam, quo
" scripti tui Usum rependam; siquam
" inveneris demonstrationem, me mo-
" neas velim; a meâ certe, methodo
" quadam particulari inventâ, diver-
" sam fore existimo.

" Sit (*Fig.* H H.) *A Punctum in*
" Linea tertii Ordinis *a quo binae*
" *Curvam contingentes, A C, A S,*
" *duci queant, (quod semper fieri po-*
" *test nisi in quibusdem simplicioribus,*
" *ut in* Parabola Cubica *et* Cis-
" soide:) *Et si a Contactibus C, S*
" *ducantur C P, S P ad Curvam*
" *concurrentes in P, ipsamque secan-*
" *tes in N, M; dico junctas C M,*
" *S N concurrere ad eandem Curvam*
" *in Q Puncto.*

" Huic Proprietati adnectitur Me-
" thodus quaedam quâ Lineam ter-
" tii Ordinis *per* septem *Puncta*
" *data,* binasque *positione* datas
" *con'ingentem, describere* novi, sive
" Curva illa per *Punctum duplex*
" transeat,

" transſeat, ſive non. Et hujus qui-
" dem Problematis Conſtructione,
" aliiſque ſimilibus, quae *Neutonus* de
" Curvarum deſcriptione docuit lon-
" gius promotum iri ſperandum, non
" ex multifariâ ſimul et ſuperfluâ
" illarum deſcriptione quae *Puncto*
" *duplici* dotantur. Illud enim aſ-
" firmare non dubito, *Curvas* deſcri-
" bendi Rationem nullam hactenus
" editam, quae Rectarum et Angu-
" lorum circa datos Polos rotatione
" conficitur, ad eas quae *Puncto du-*
" *plici* deſtituuntur pertingere; quae
" tum demum deſcribentur ſi Puncta
" angularia rectas quaſdem datas per-
" currant: ut in *Prop.* 15. *Deſcrip.*
" *Curv. Part.* I. olim oſtendi, et ſi-
" quando ea retractare licuerit, lucu-
" lentius oſtenſurus ſum. Haec au-
" tem memoro, quod, Reipublicae
" Literariae plurimum intereſſe in-
" telligam, ne, Scientiae vel Specu-
" lativae quae dicitur, Pars aliqua

" ultra limites quos revera attigit pro-
" vecta existimetur.

" In *Sectione* quavis *Conicâ*, et " rectâ in eodem Plano ductâ, Pro- " prietatem analogam facile agnos- " ces † * * * * * Ostendi etiam po- " test; *si a Puncto A bis duae Con-* " *tingentes duci queant, rectas quae* " *bina quaevis Contactus Puncta con-* " *jungunt ad Curvam se decussare,* " *nisi forte Parallelae evaserint sibi* " *invicem atque tangenti ad distan-* " *tiam infinitam.* Atque hinc quoad " memini (nihil enim a me exscrip- " tum) ad Lemma tuum deductus " sum.

" Quod si Tractatum illum editu- " rus, his nostris uti volueris, nil re- " cuso." * * * *

Quâ arte Propositiones istas invenerit Vir Cl. me latet. Exinde tamen ad Sequentia, per Methodum Projectionum, deductus sum.

Theo-

† Vid. supra *Sect.* III. *Schol. ult.*

THEOREMA II. Tab. X. *Fig.* Q.

In Curvis quarum Aequatio $xy^2 - ey = bx^2 + cx + d$, *quoties Aequationis* $bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ *Radices ſunt reales et inaequales, ſit* τ *Vertex quilibet (in quo ſc. recta Curvam contingens eſt Aſymptoto P R parallela,) C* τ *D recta per Verticem illum Curvae occurrens in Punctis C, D; ductiſque C A, D B Abſciſſae S L parallelis, quarum illa Curvam ſecet in* A, *juncta A* τ *(et forté producta) rectam D B ad Curvam ſecabit in Puncto* B.

DEMONSTRATIO.

Accipiatur pro Abſciſſâ novâ ipſâ Contingens E τ e, ad quam in Puncto E ordinetur A C; tum vero tranſformatâ rité Aequatione, deletiſque, ut aequum, terminis quos neutra variabilis ingreditur, invenies eſſe ubique rectangulum A E × E C ad ipſius E τ quadratum in ratione datâ, quam

quam nempe habet r ad Unitatem; posito quod sit r Aequationis $b x^3 + c x^2 + d x + \frac{1}{4} e e = 0$ radix ad Verticem τ pertinens. Sed, ob Triangula homologa, est rectangulum $D F \times F B$, sub Segmentis in quae Contingens E e ipsam D B dividit in F, ad τ F quad. in eadem Ratione; quare quum sit Punctum D ad Curvam (*ex hyp.*) ad eandem erit et Punctum B. *Q. E. D.*

COROLL.

Inversâ nunc denique Projectione ad prius illud D. *Mac Laurin* Theorema regredi licebit.

Assumptâ enim pro *Linea Extremorum* rectâ quavis Z Y, Asymptoto non parallelâ, nec quae per ullum è Punctis A, B, C, D, transeat, Parabolae Projectionem continget *Horizontalis* in Puncto ad quod convergunt Parallelarum A C, D B Projectiones. At Contingentis E τ e Projectio eidem Horizontali occurret (puta

ta in Puncto P) ubi coeunt Crurum Hyperbolicorum Projectiones. En itaque, in hâc Projectione, binas rectas ex eodem Curvae Puncto (P, ductas, quae ipsam Curvam contingunt. Unde quum in eadem Curvâ maneant et Punctorum A, B; C, D; Projectiones, rectis per Puncti τ Projectionem transeuntibus connexae, constat Propositum. Curvarum enim de quibus hic agitur quaelibet in *Hyperbolo-Parabolam* ita projici potest, ut *Genitricis* Punctum quodcunque datum, *Genitae* Verticem occupet.

THEOREMA III. *Vid. Fig. Neut.*

Sint T, t, τ, ῑ, *quatuor Vertices Curvae alicujus Neutonianae, quorum bini quivis rectis (ut* Tτ, t *) jungantur, erit rectarum intersectio ad Curvam.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Curvam secet harum altera (T τ,) si Opus producta, in Puncto C. Ex hoc ducatur Abscissa nova, ad quam, in Punctis P, p, π, ϖ, ordinentur rectae quae Figuram ad Vertices T, t, τ, ƭ contingunt. Transformatâ nunc Aequatione, quaeratur Valor Ordinatae Curvam contingentis, eritque hujus Expressio quatuor Ordinatis communis. At quum sit, ex Constructione T τ C recta, adeoque Ordinatae T P, τ π, Abscissis C P, C π Proportionales, erunt et t p, ƭ ϖ, ut Abscissae C p, C ϖ, id est, recta t ƭ (ad Abscissam pariter inclinata) per idem Punctum C transibit. *Q. E. D.*

Corol. I.

Projiciatur Figura, ut *Tangentes Verticales*, *Asymptotos*, et *Crura infinita* huic applicata ad idem Punctum coëant, utque ultro prodibit alterum D. *Mac Laurin* Theorema modo,

do memoratum *. Quod ſc. " duc-
" tis ab eodem Curvae *Neutonianae*
" Puncto quatuor rectis quae ipſam
" contingant, ſi bini quivis contactus
" rectis jungantur, erit rectarum in-
" terſectio ad eandem Curvam."

COR. 2.

Hinc quoque demonſtratur Propoſitio illa in quam prius incideram, " Si a Puncto contrarii Flexûs, du-
" cantur tres rectae quae Curvam
" contingant, fore tres contactus in
" eâdem rectâ : Accedente ſc. Puncto a quo rectae duci ponuntur, ad alterum contrarium Flexum, ut tandem cum ipſo coincidat.

COR. 3.

Tranſeat Linea Extremorum per unum e Punctis Contactûs, et manebunt in Projectione tres duntaxat contingentes, quae Aſymptoto occurrent in Puncto ad quod Crurum Hyper-

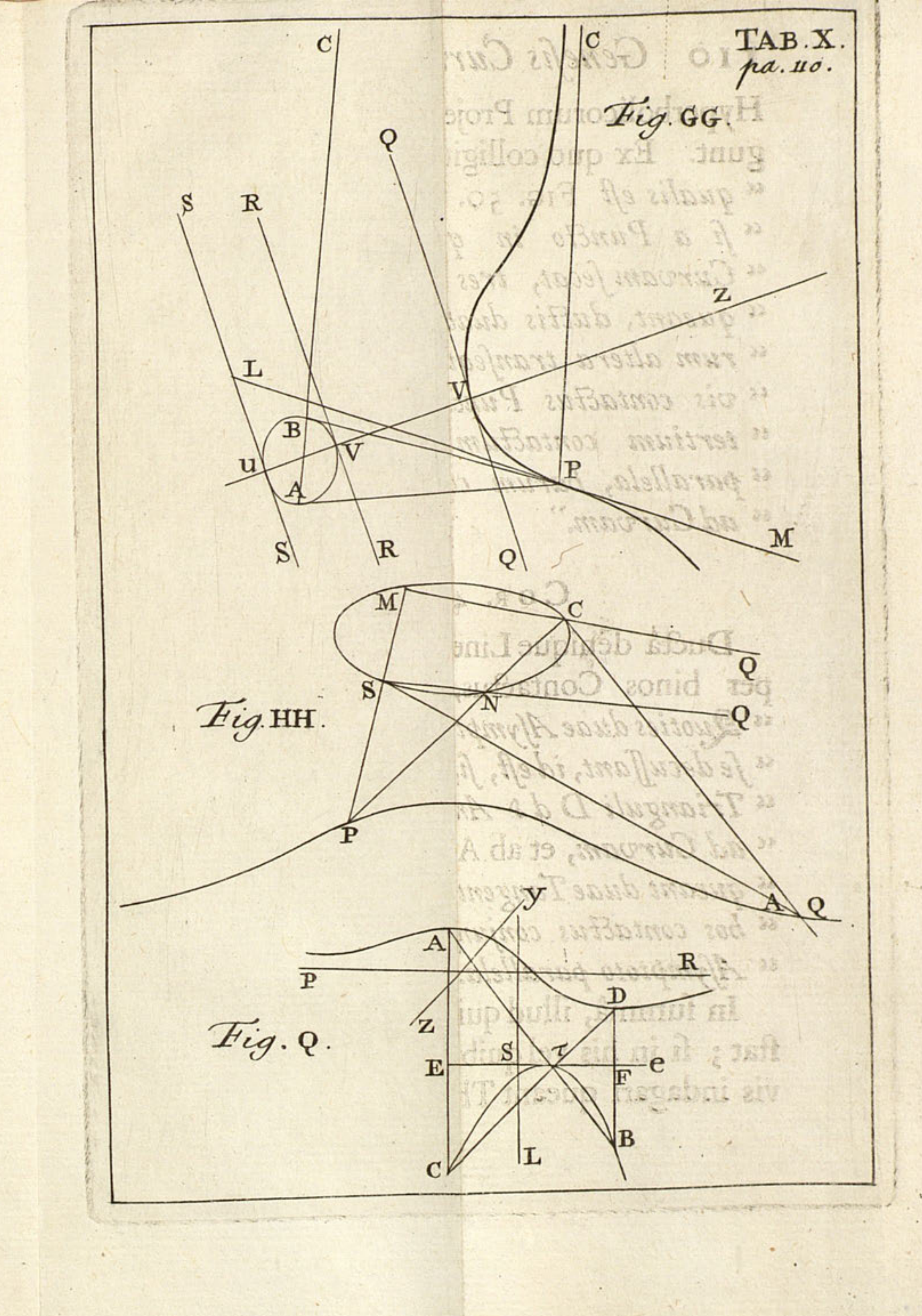
* Vide *Treatiſe of Fluxions*, §. 401.

Hyperbolicorum Projectiones convergunt. Ex quo colligitur " *In Curvis* " *qualis est* Fig. 50. Enum. Neut. " *si a Puncto in quo Asymptotos* " *Curvam secat, tres Tangentes duci* " *queant, ductis duabus rectis qua-* " *rum altera transeat per duo quae-* " *vis contactus Puncta, altera per* " *tertium contactum sit Asymptoto* " *parallela, harum concursum fore* " *ad Curvam.*"

Cor. 4.

Ductâ denique Lineâ Extremorum per binos Contactus, sequetur ut, " *Quoties duae Asymptoti ad Curvam* " *se decussant, id est, si, in* Fig. Neut. " *Trianguli D d δ Angulus unus sit* " *ad Curvam,* et ab Angulo *illo duci* " *queant duae Tangentes ; recta quae* " *hos contactus conjungit, sit tertiae* " *Asymptoto parallela.*

In summâ, illud quidem satis constat ; si in his vel quibusvis aliis Curvis indagari queant Theoremata simpliciora,


TAB. X.
pa. 110.
Fig. GG.
C
C
Q
S
R
Z
L
V
B
V
u
A
P
M
S
R
Q
Fig. HH.
M
C
Q
S
N
Q
P
A
Q
Fig. Q.
y
A
R
P
D
z
E
S
τ
F
e
B
L
C

pliciora, ad Parallelas adſcriptas pertinentia, haec omnia ad plura alia de Lineis ad Puncta data convergentibus, transferri poſſe: quae aliâ quacunque ratione inventu difficillima forent.

Sed ad Enumerationem inſtitutam redeamus.

Claſſis Quarta.

Curvas continens quae fiunt ex Parabola Nodata. Spec. 68. *Fig.* 73.

Pars 1.

Ubi Linea Extremorum eſt Ordinatae (*y*) *parallela: Fig.* K K.

XLVIII.

Secet L Axem *Parabolae Nodatae* cis Verticem ut in A, erit Projectio *Hyperbola Nodata*, cui Aſymptotos eſt Linea Horizontalis ſeu Projectio Ordinatae ad Diſtantiam infinitam. *Species* 41. *Fig.* 46.

XLIX.

XLIX.

Si *Nodum* contingat in B, is in duo Crura *Parabolica* protendetur, ut fiat *Species* 54. *Fig.* 58.

L.

Secet Axem in C, Curvam in T, T, ut quae in illis Punctis ipsam contingunt convergant ad Partes Verticis. Et Figura Genita erit tres *Hyperbolae inscriptae*, quarum duae se mutuo decussant; et quia tangentium Concursus supra Horizontalem projicitur, fit *Species* 19. *Fig.* 25.

LI.

Sin ad Partes Crurum convergant, Lineâ sc. Extremorum Axem secante in E; Asymptoti in quas projiciuntur Tangentes concurrent infra Horizontalem; estque *Species* 18. *Fig.* 24.

LII.

Sint denique Tangentes illae parallelae, ut Aſymptoti concurrant ad Horizontalem ; et evaneſcente Triangulo convertuntur binae praecedentes in *Speciem* 30. *Fig.* 36.

LIII.

Tranſeat L per Punctum *Nodi* F, et Tangentes ad illud Punctum projicientur in duas Aſymptotos parallelas, ab Axe aequidiſtantes ; ut fiat *Species* 60. *Fig.* 64.

LIV.

Secet Axem in G, Crura infinita in T T ; ad quae Puncta Curvam contingentes projiciantur in binas Aſymptotos ſupra tertiam ſe decuſſantes; et fiet *Species* 11. *Fig.* 18.

Pars Altera.

Ubi Linea Extremorum non eſt Ordinatae parallela. *Fig.* L L.

LV.

Circa Punctum aliquod T in Crure *Nodatae* assumptum rotari intelligatur recta L; et primo Situm obtineat T M, ut Curvae in unico Puncto occurrat: Tangens ad T, projecta, evadet Asymptotos Hyperbolae *Anguineae* cum *Nodo*, *Speciei* 34. *Fig*. 40.

LVI.

Tangat *Nodum* in N, isque in bina Crura *Parabolica* projectus *Speciem* dabit 51. *Fig*. 55.

LVII.

Secet deinde *Nodum* in S, S, ut Tangentes ad S, S, convergant ad has Partes Lineae Extremorum ut in P, sitque Triangulum contingentium P Q R. In Projectione Punctum *Crucis* cadet extra Triangulum Asymptotôn, nempe sub basi in quam pro-

projicitur Tangens T R *; Figura autem erit hujusmodi.

Segmentum S N S Hyperbolam dabit *Inscriptam.* Segmentum S D A B F T alteram *Inscriptam* Asymptotis quae fiunt é Tangentibus T R, S R. At Segmentum S E A B F cum Crure infinito F X ipsi adjuncto, et reliquo alterius cruris a T versus Z in infinitum excurrentis, Hyperbolam dant *Ambigenam*, quam sc. secat altera Asymptotos e Tangente T R genita. Estque haec *Species* 8. *Fig.* 11, 12.

Nota. Fig. 12, Casum exhibet ubi Projectio Tangentis T R pro Ordinatâ primâ usurpatur; *Fig.* 11, ubi alia Asymptotos eâ vice defungitur.

LVIII.

Sin recta L in Situm transeat T B B aut T A A ut Tangentes concurrant ad alteras Partes, ut in p, vel sint forte parallelae, in priore casu Pro-

* Vide *Schol.* 1. *Sect.* II.

jectio eatenus differet a praecedente, quod Punctum *Crucis*, seu ubi duae Hyperbolae se mutuo decussant, cadere possit ad Verticem Trianguli Asymptotôn. Id vero fiet quoties Nodum contingentes B p (*Fig.* M M) concurrunt ad has Partes Tangentis T r. Quae est *Species* 7. *Fig.* 13, 14.

LIX.

Si Tangentium concursus p in ipsam T r incidat, evanescente triangulo, fit *Species* 25. *Fig.* 31.

LX.

Coeant Puncta B, B, cum Puncto Nodi F, et quae Curvam in illo Puncto contingunt G H, I K, projicientur in duas Asymptotos parallelas, secundam quas Crura extendet *Hyperbola* ex Nodo genita. Reliquum Figurae duas alias edet *Hyperbolas*, quarum altera est *Ambigena*. *Species* 57. *Fig.* 61.

LXI.

Accedat et T ad F, ut ſit contingens G H Linea Extremorum; et naſcentur duae Figurae *Hyperbolo-Parabolicae* (*Neutono Tridens.*) *Species* 66. *Fig.* 72.

LXII.

Secet L Crura in Punctis D, M, N; *Nodus* cum Parte Crurum abſciſſâ abit in Hyperbolam *Nodatam*, Portio Punctis D, M interjecta in *Inſcriptam*, Reliquum Figurae in *Ambigenam*. *Species* 2. *Fig.* 3, 4.

LXIII.

Coeant M, D, ut Linea Extremorum Crus alterum contingat, ut in m; et peribunt duae Aſymptoti cum Hyperbolâ Inſcripta, manentibus binis Curvis *Hyperbolo-Parabolicis*, quarum altera eſt Nodata, *Species*. ſciz. 47. *Fig.* 51.

LXIV.

Transeat L per Punctum F, Nodo ubivis occurrens ut in *t*; patet Figuram Genitam fore *Speciei* 58. *Fig.* 62.

LXV.

Quae, si fuerit *t* ad Verticem Parabolae, transibit in *Speciem* 59. *Fig.* 63.

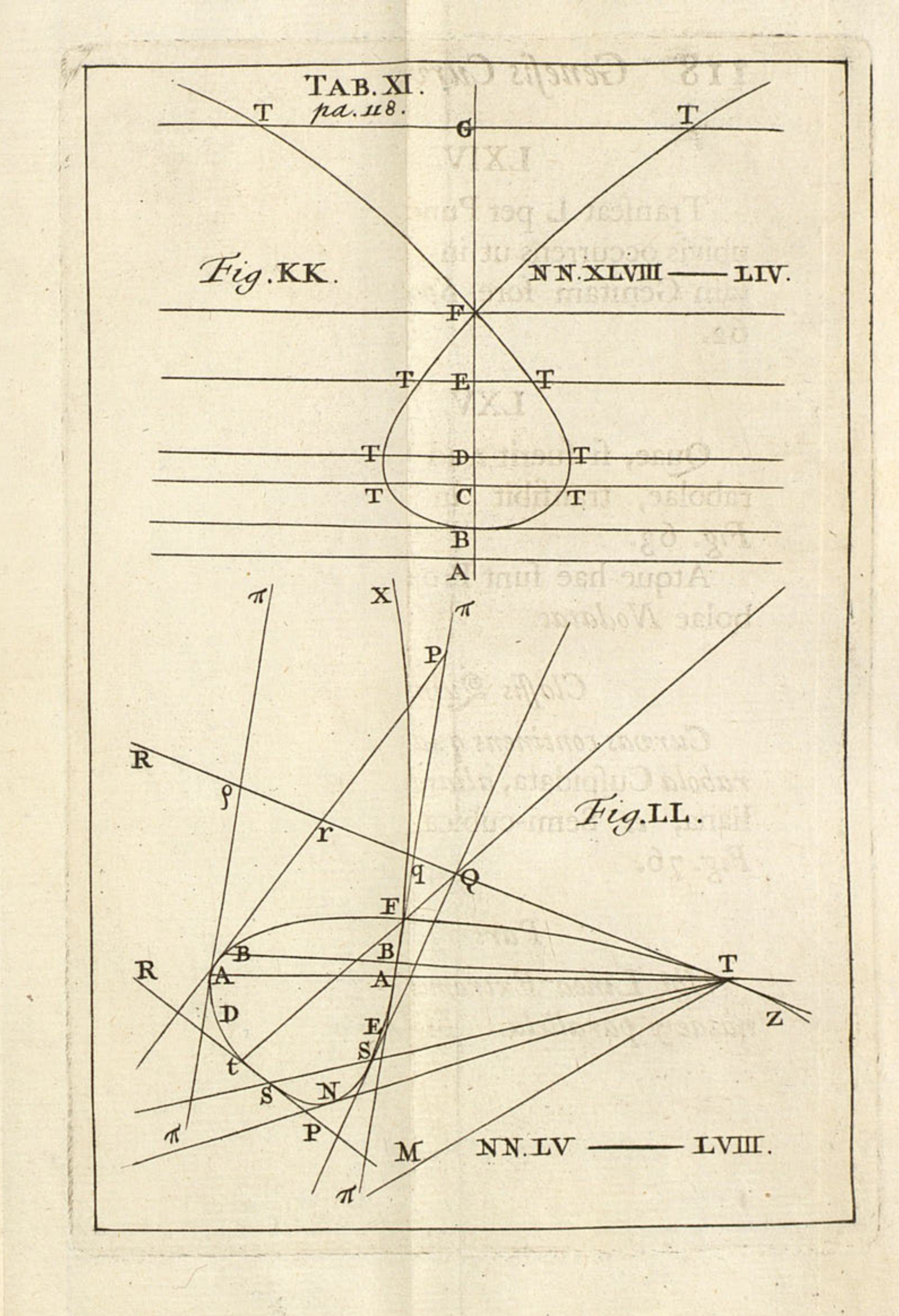
Atque hae sunt Projectiones Parabolae *Nodatae.*

Classis Quinta.

Curvas continens quas generat Parabola Cuspidata, *alias Parabola* Neiliana, *et* Semi-cubica. *Spec.* 70. *Fig.* 76.

Pars 1.

Ubi Linea Extremorum est Ordinatae y parallela. Fig. N N.



TAB. XI.
pa. 118.
Fig. KK.
NN. XLVIII — LIV.
T
T
G
F
T
E
T
T
D
T
T
C
T
B
A
Fig. LL.
X
π
π
P
R
ρ
r
q
Q
F
B
B
R
A
A
T
D
E
S
Z
t
S
N
π
P
M
π
NN. LV — LVIII.

LXVI.

Secet L Axem in A cis Verticem; erit Projectio *Species* 42. *Fig.* 47. Quae est *Cissois* Veterum.

LXVII.

Si transit per Cuspidem, Figura erit duae *Hyperbolae Speciei* 65. *Fig.* 69.

LXVIII.

Si Curvam secet in Punctis T, T, fiet *Species* 12. *Fig.* 19.

Pars Altera.

Ubi recta L *Ordinatae non est parallela. Fig.* O O.

LXIX.

Secet L *Cuspidatam* in unico Puncto T; erit figura genita *Anguinea Cuspidata*, *Speciei* 35. *Fig.* 41.

LXX.

Transeat deinde per *Cuspidem*, atque orientur duae *Hyperbolae* ad duas Asymptotos, quarum altera Curvam secat. *Species* 64. *Fig*. 68.

LXXI.

Secet in tribus Punctis T, M, N; et nascentur tres Hyperbolae, quarum una *Inscripta* est, una *Ambigena*, tertia autem *Cuspidata* et *Circumscripta*. *Species* 3. *Fig*. 5, 6.

LXXII.

Coeuntibus T, M, in S, ut pereant duae Asymptoti cum Hyperbolâ inscripta, oritur Figura *Hyperbolo-Parabolica Cuspidata*, *Speciei* 48. *Fig*. 52.

LXXIII.

Ipse Axis pro Linea Extremorum usurpetur, et Parabola *Cuspidata* trans-

transibit in *Cubicam*, *Speciem* sc. 72. *Fig.* 77.

LXXIV, LXXV, LXXVI, LXXVII, LXXVIII.

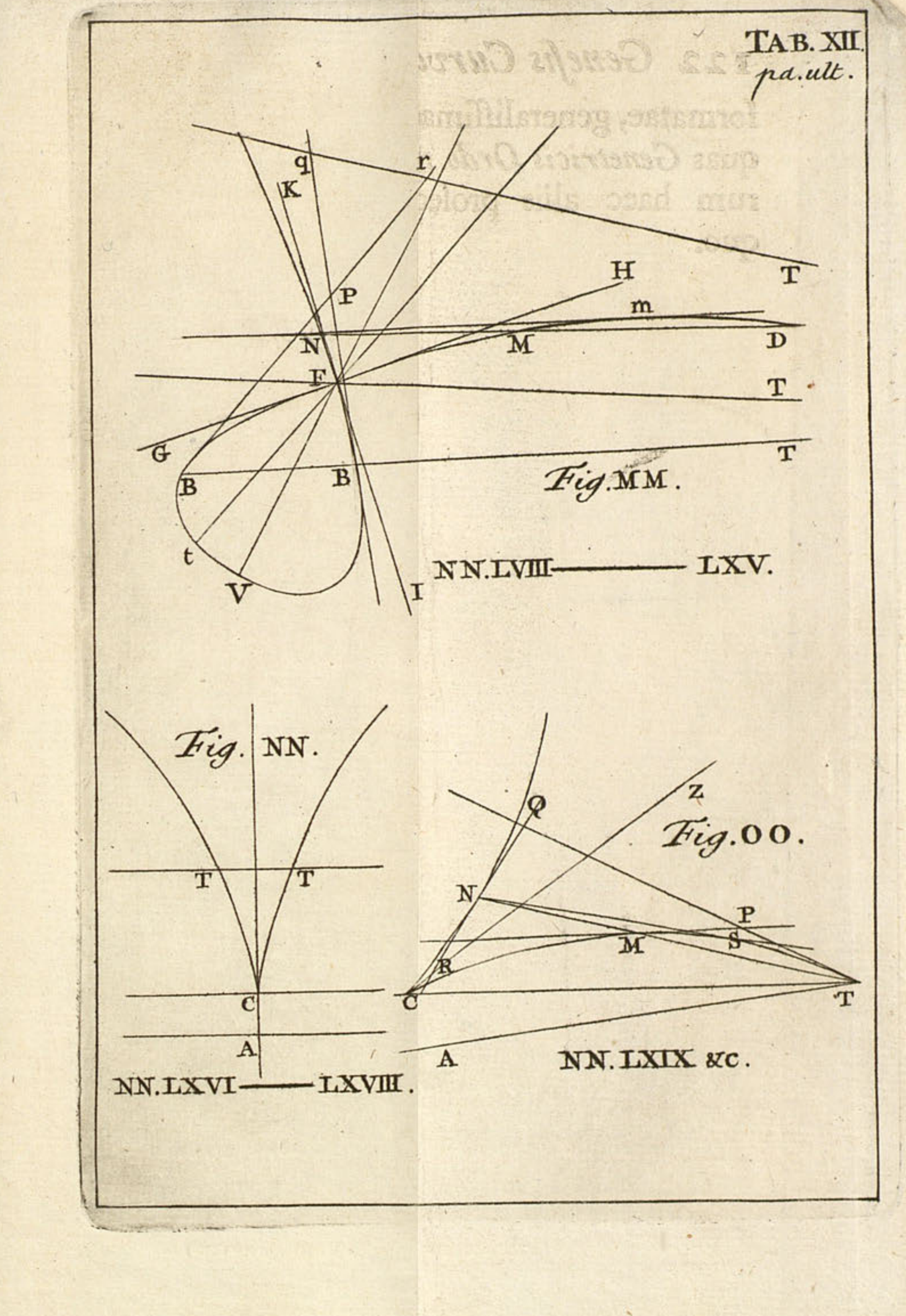
Quibus si quinque Figuras *Genetrices* adnumeres, erunt Lineae tertii Ordinis *septuaginta* et *octo.*

SCHOLIUM.

Curvas superiorum Ordinum (aut quasvis ipsarum *familias*) eodem ritu tractare licet, enumeratis primum *Speciebus* ceterarum *Genetricibus*, Sic in Lineis *Quarti Ordinis*, projiciantur Curvae Aequationibus y^2 et $y^4 = a x^4 + b x^3 + c x^2 + d x + e$, designatae; in *Quinto Ordine*, Aequationibus y^2 et $y^4 = a x^5 + b x^4$ + &c. In *Sexto* et *Septimo*, Ordinatae dimensiones sint, y^2, y^4, y^6; et sic porro. Istae enim in Aequationes *ad Projectionem obliquam* transformatae,

formatae, generalissimae videntur esse quas *Genetricis Ordo* requirat. Verum haec aliis prosequenda relinquo.

INDEX


TAB. XII.
pa. ult.
q
r
K
P
H
T
m
N
M
D
F
T
G
T
B
B
Fig. MM.
t
V
I
NN. LVIII ——— LXV.
Fig. NN.
T
T
C
A
NN. LXVI ——— LXVIII.
Q
z
Fig. OO.
N
P
M
S
R
C
T
A
NN. LXIX &c.

INDEX PROJECTIONUM

Prout Speciebus a NEUTONO *et* STIRLINGIO *enumeratis respondent.*

Project.	*Neut.*	*Stirl.*	*Fig.*
I	39	43	44
II	55	59	59
III	21	23	27
IV	31	35	37
V	20	22	26
VI	56	60	60
VII	40	44	45
VIII	*	*	*
IX	*	11	*
X	10	10	17
XI	*	24	28
XII	33	37	39
XIII	52	56	56
XIV	9	9	15, 16
XV	26	31	32
XVI	46	50	50
XVII	1	1	1, 2
XVIII	27	31	33
XIX	43	47	49
XX	44	48	49
XXI	63	67	67
XXII	*	*	57
XXIII	*	15	21
XXIV	13	14	20
XXV	*	25	28

Project.	*Neut.*	*Stirl.*	*Fig.*
XXVI	36	40	42
XXVII	61	66	65
XXVIII	49	53	53
XXIX	4	4	7
XXX	62	65	66
XXXI	45	49	48, 49
XXXII	53	57	57
XXXIII	15	17	21
XXXIV	14	16	20
XXXV	17	19	23
XXXVI	16	18	22
XXXVII	29	33	35
XXXVIII	28	32	34
XXXIX	22	26	28
XL	23	27	29
XLI	32	36	38
XLII	37	42	42
XLIII	50	54	53, 54
XLIV	5	5	7, 8
XLV	6	6	9, 10
XLVI	24	28	30
XLVII	38	41	43
XLVIII	41	45	46
XLIX	54	58	58
L	19	21	25
LI	18	20	24
LII	30	34	36
LIII	60	64	64
LIV	11	12	18

LV

Project.	*Neut.*	*Stirl.*	*Fig.*
LV	34	38	40
LVI	51	55	55
LVII	8	8	11, 12
LVIII	7	7	13, 14
LIX	25	29	31
LX	57	61	61
LXI	66	70	72
LXII	2	2	3, 4
LXIII	47	51	51
LXIV	58	63	62
LXV	59	62	63
LXVI	42	46	47
LXVII	65	69	69
LXVIII	12	13	19
LXIX	35	39	41
LXX	64	68	68
LXXI	3	3	5, 6
LXXII	48	52	52
LXXIII	72	74	77
LXXIV	67	71	70, 71
LXXV	69	73	74
LXXVI	71	75	74, 75
LXXVII	68	72	73
LXXVIII	70	74	76

Nota.

Nota. Ordo Figurarum in Editione D. *Jones* variat ab illâ post *Opticam Neutoni* impressâ ut sequitur.

Neut.	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,
Jones,	11,	12,	15,	16,	9,	10,	13,
N.	16,	72,	73,	74,	75,	76.	
J.	14,	73,	74,	75,	76,	72.	

F I N I S.




297/78
UNIVERSIDAD DE SEVILLA
Biblioteca
UNIVERSIDAD DE SEVILLA
600710364
i 27977080




297
78